Chiffres significatifs et incertitudes

Niveau 1	Valeur numérique	

Une grandeur expérimentale n'est jamais parfaitement connue, il existe une certaine incertitude sur une mesure. Par exemple si vous mesurez une longueur avec une règle graduée en millimètres la mesure sera au mieux connue au mm. En mathématique les nombres sont supposés parfaitement connus, si on écrit 1/3 on connaît une infinité de chiffres après la virgule 0,3333333… . En math π = 3,141592… , en sciences physiques on écrira 3,14 , 3,1 ou 3 suivant la précision recherchée.
Ainsi rien ne sert d'indiquer tout les chiffres, donnés par une calculatrice par exemple. Vous voulez découper une bande de papier de L = 1 m en neuf parties égales. Pour vos découpes d=11,1 cm (indiqué au mm car c'est la précision de votre règle, nous n'écrirons pas d = 11,11111111 cm).

Niveau 2	Chiffres significatifs	Seconde

Description d'une méthode approximative permettant d'évaluer simplement la précision d'un résultat.

Ecriture des grandeurs :

La précision d'une grandeur numérique est indiquée par le nombre de chiffres significatifs :

- L = 213 cm est connue à 1 cm près
- Une longueur de 3 m connue au dm près est écrite : l = 30 dm = 3,0 m
- Si nous notons g = 9,8 $m.s^{-2}$, deux chiffres significatifs, la précision sur g est de l'ordre de 1%. Si g = 9,81 $m.s^{-2}$, trois chiffres significatifs, celle-ci est d'environ un pour mille.
- I = 0,21 A, deux chiffres significatifs, I connue à 10 mA près, peut aussi s'écrire 21 $.10^1$mA, précision de 1/21 ~ 5%.

Sommes et différences :

le terme qui a <u>le dernier chiffre significatif</u> le moins précis indique la précision du dernier chiffre significatif du résultat.

- D = $x_2 - x_1$ avec x_1 = 2 cm et x_2 = 1647 mm. D'où D = 1627 mm, tous les chiffres sont-ils significatifs ? x_1 au cm près, x_2 au mm près, le résultat est donc au cm près : D = 163 cm.
- $U_{AD} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD}$ avec U_{AB} = 12,01 V, U_{BC} = 32 mV et U_{CD} = - 79 V d'où U_{AD} = -67 V.

Produits et quotients :

le facteur qui a <u>le nombres de chiffres significatifs</u> le plus faible indique le nombre de chiffres significatifs du résultat.

- R = U / I avec U = 13,2 V et I = 37 mA, d'où R = 36. 10^1 Ω.
- $C_A=C_BV_B/V_A$ avec C_B = 1,5. 10^{-3} $mol.L^{-1}$, V_B = 100,0 mL et V_A = 25 mL, d'où C_B = 6,0. 10^{-3} $mol.L^{-1}$.

Remarques :

- Le nombre de chiffres significatifs du résultat peut être supérieure à celui des données : L = $l_1 + l_2$ avec l_1 = 75 mm et l_2 = 82 mm d'où L = 157 mm.
- Si H = 2.h = h + h avec h = 2,00 m alors H ≈ 4,00 m quelque soit la méthode c'est correct (pour le produit, 2 est un facteur mathématique parfaitement connu).
- Si H = 100.h = h + … + h avec h = 2,00 m alors on aurait H ≈ 200,00 m ou 200 m. Aucuns des deux résultats n'est le bon mais la méthode, ici trop simplificatrice, ne l'indique pas.
- v = $\sqrt{(2gh)}$, g et h connus on ne peut à priori donner la précision pour v. En fait pour des racines ou des carrés la méthode des produits reste correcte. Mais pour des puissances trop grandes ou trop faibles ça devient faux : Ep = - C/r^6, R =$Ro.r^{10}$ ou a = $\sqrt[5]{A}$…
- Ne marche pas pour les sinus, logarithmes …
- Devient délicat quand il faut combiner les deux règles : f' = $(D^2-d^2)/4D$.

Niveau 3	<u>Incertitudes</u>	

Méthode moins approximative grâce à l’introduction de la notion d’incertitude qui se substitue a celle des chiffres significatifs.

Incertitudes :
Considérons une longueur de 163 cm connue à 5 cm près, nous écrirons alors : L = 163 ± 5 cm.
L’expression générale pour une grandeur X est : $X = X_{moyen} \pm \Delta X$.
ΔX est appelée l’incertitude sur X.

Précision : elle est exprimée à l’aide d’un pourcentage $\Delta X / X_{moy}$. Pour L elle est d’environ 3%.

Sommes et différences : *le terme qui a <u>la plus grande incertitude</u> indique l’incertitude du résultat.*

Produits et quotients : *le facteur <u>le moins précis</u> indique la précision du résultat.*

- n = C.V avec C = 2. 10^{-3} mol.L^{-1} à 5% et V = 19,6 ± 0,2 mL. La précision sur le volume est de 1%. La précision du résultat est donc de 5%. n = 3,92. 10^{-5} mol à 5% soit n = 39,2 ± 2 μmol.

- Les incertitudes ou précisions ne s’ajoutent pas, sur le dernier exemple nous pourrions être tenté de prendre une précision de 6% pour le résultat, en fait un calcul exact donne 5,1%. La grandeur la plus incertaine ou imprécise s’impose sur le résultat.
- Si nous avons une fonction monotone des variables, on peut trouver un maximum pour l’incertitude : Rmin=Umin/Imax, Rmax=Umax/Imin et ΔR=(Rmax-Rmin)/2. L’incertitude est surestimée alors que la méthode précédente la sous-estime.

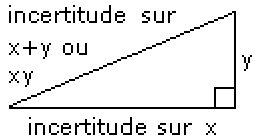
Niveau 4	<u>Calcul d’incertitudes</u>	

Méthode précise mais pas encore générale.

Incertitudes absolues et relatives: nous avons $X = X_{moy} \pm \Delta X$.
ΔX est appelée l’incertitude absolue. $\Delta X / X_{moy}$ l’incertitude relative (la précision).

Sommes et différences: *les incertitudes absolues au carré s’ajoutent.*

Produits et quotients: *les incertitudes relatives au carré s’ajoutent.*



- $D = d_1 + d_2$ avec $d_1 = 8 \pm 1$ cm et $d_2 = 16 \pm 1$ cm alors D = 24 ± 1,4 cm.
- $D = \Sigma\, d_i$ avec i=1..100 et $d_i = 100 \pm 1$ cm alors D = 100 m ± 10 cm et non 1 cm ou 1 m.

Niveau 5	<u>Formule de propagation des incertitudes</u>	Supérieur et prof.

Nous avons une grandeur physique f que nous calculons à partir d’autres mesurées x_i:
$f(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ avec $x_i = x_{imoy} \pm \Delta x_i$ et $i = 1 \ldots n$. Grandeurs x_i indépendantes.

Alors $f = f_{moy} \pm \Delta f$ avec $\boxed{(\Delta f)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (\Delta x_i)^2}$ Tout est là, vive la statistique !

- $n = n' \sin i_l$, n’=1,52±0,02 et il=62±2° on a $(\Delta n)^2 = (\sin i_l \Delta n')^2 + (n' \cos i_l \Delta i_l)^2$ d’où n=1,34±0,03.
- X=2x → ΔX=2Δx. $X = x_1 + x_2$ avec $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$ → ΔX=√2Δx. Variables indépendantes: compensation.