Filtration sur gâteau

Devoir (durée 3 heures)

<u>Question de Cours</u> : À partir de l'équation fondamentale de la filtration, déterminer, dans le cas d'une filtration en régime laminaire, sur gâteau incompressible, à pression constante et en négligeant la résistance de filtre, l'expression du volume filtré V et de la vitesse u de sortie du filtrat en fonction du temps et des constantes r, μ, v, S et ΔP. Représenter sur le même graphique l'allure des courbes représentative de V et u. Quelle est la limite de $u(t)$ quand t tend vers zéro ? Commentaire.
La filtration s'effectue pendant une durée t_1, quelle est dans les conditions explicitées ci-dessus le débit volumique moyen de filtration D_m ?

<u>Problème</u> : Soit une boue contenant 30 % en masse de solide. 100 L de cette boue passe dans un filtre carré de 50 cm de coté sous une pression constante d'un dixième de bar.

Données :

Masse volumique du solide	2 g / mL
Viscosité de l'eau	10^{-3} Pa.s
Degré de vide du gâteau	40 %
Résistance spécifique du gâteau	$2.\ 10^{12}$ m^{-2}

1) Déterminez le pourcentage en volume de solide dans la boue.

2) Déterminez le rapport du volume de gâteau sur le volume de filtrat obtenu.

3) Calculez le temps de filtrage dans les deux cas suivants :
   a) la résistance du filtre est négligée.
   b) la largeur équivalente du filtre vaut 10 % de la largeur finale du gâteau.

4) Le filtrage est maintenant effectué en deux étapes, la première au débit constant de 3 L/min puis la deuxième à pression constante.
   Déterminez la durée de chacune des deux étapes sans ou avec résistance de filtre.

5) Tracez l'évolution du volume filtré et de la pression sur un graphique pour les quatre cas considérés.

Travaux Pratiques : Nous disposons d'un tube cylindrique transparent de 1m20 de longueur et de 10cm de diamètre. Nous le plaçons verticalement et le refermons avec un filtre sur sa partie basse. Nous avons des petites billes sphériques d'un millimètre de diamètre et de densité égale à un. Nous mélangeons 1 kg de ces billes dans 7L d'eau et plaçons le mélange obtenu dans le tube. La filtration est alors réalisée de trois manières différentes : tout d'abord par une surpression de deux bar en amont, puis par un vide de 12 mm de Hg en aval créé par une trompe à vide et finalement par gravité. La hauteur finale du gâteau est dans tous les cas de 18,7cm.
La viscosité de l'eau est de 1mPa.s et le champs de pesanteur vaut 9,81 m/s^2.

1. Combien y a-t-il de billes dans le mélange ?
2. Le tube est rempli jusqu'à quelle hauteur ?
3. Quel est le degré de vide du gâteau ? Vérifiez la cohérence avec la compacité C obtenue pour un empilement compact de sphères dans un cristal : *C=(Volume occupé par les atomes)/(Volume de la maille)≃0,74.*
4. Déterminer v, rapport du volume du gâteau sur celui du filtrat.

5. Montrez que dans les deux premiers modes de filtration la surpression due à la hauteur de la colonne d'eau peut être négligée. Quelle conséquence cette approximation a sur la précision des résultats ?
6. Pour la filtration par surpression nous avons 3L de filtrat en 3min puis 6L en 12min. Montrez que ces résultats nous amène à négliger la résistance de filtre. Calculez la résistance spécifique du gâteau.
7. Considérant le gâteau incompressible déterminez les temps pour obtenir 3L et 6L avec la trompe à eau.

8. Filtration par gravité :
   a) Exprimez en utilisant l'équation de la statique des fluides adéquat ΔP en fonction V.
   b) Montrez que nous avons la relation : $\frac{dV}{dt}=\frac{A}{V}-B$ où A et B sont des constantes. Exprimez A et B en fonction des données.
   c) Exprimez t en fonction de V.

9. Comparez les temps de filtrage à 3L et 6L pour les trois protocoles. Commentaires. Avantages et inconvénients de la méthode par gravité ?

Corrections

Problème

1) $$P_v = \frac{V_{solide}}{V_{boue}} = \frac{V_s}{V_s + V_{filtrat}} = \frac{\frac{m_s}{\rho_s}}{\frac{m_s}{\rho_s} + \frac{m_f}{\rho_f}} = \frac{\frac{P}{\rho_s}}{\frac{P}{\rho_s} + \frac{1-P}{\rho_f}}$$

avec $P_m = \dfrac{m_s}{m_b}$ $\Rightarrow$ $$\boxed{P_v = \frac{\rho_f P_m}{\rho_f P_m + \rho_s(1-P_m)}} \simeq 0{,}1765 = \underline{17{,}65\%}$$

avec : $P_m = 0{,}3 = 30\%$ $\quad \rho_f = 1000\ kg/m^3$ $\quad \rho_s = 2\ \dfrac{g}{mL} = 2\ \dfrac{10^{-3}\ kg}{10^{-6}\ m^3} = 2000\ kg/m^3$

2) $$v = \frac{V_g}{V_F} \qquad V_g = V_s + V_{vide} = V_s + \varepsilon V_g \qquad \varepsilon = \frac{V_v}{V_g} \Rightarrow V_v = \varepsilon V_g \Rightarrow V_g = V_s/1-\varepsilon$$

or : $V_b = V_s + V_F$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{V_s}{(1-\varepsilon)(V_b - V_s)} = \frac{P_v}{(1-\varepsilon)(1-P_v)}} \simeq \underline{0{,}357}$$

3) a) Équation de la filtration : $$\frac{dV}{dt} = \frac{S^2 \Delta P}{r\mu v V} \Rightarrow \frac{V^2}{2} = \frac{S^2 \Delta P}{r \mu v} t + \underset{0}{c}$$

car $V(t=0) = 0$

$$\Rightarrow V^2 = \frac{2 S^2 \Delta P\, t}{r\mu v}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{r\mu v V^2}{2 S^2 \Delta P}} = \frac{2.10^{12} \times 10^{-3} \times (82{,}35.10^{-3})^2 \times 0{,}357}{2 \times 0{,}5^4 \times 0{,}1 \times 10^5} \simeq 3874\,s \simeq \underline{1h\,4min\,34\,s}$$

Calcul de $V_{final} = V_b - V_s = V_b - P_v V_b = V_b(1-P_v) \simeq 0{,}08235\ m^3 \simeq 82{,}35\ L$

b) Calculons la largeur finale du gâteau :

$$V_g = SL \qquad L = \frac{V_g}{S} = \frac{V_{sol}}{(1-\varepsilon)S} = \frac{V_b P_v}{(1-\varepsilon)S} \simeq 0{,}1177\,m \simeq 11{,}77\,cm$$

$\Rightarrow \underline{L' = 1{,}18\ cm}$

$$\frac{1}{S}\frac{dV}{dt} = \frac{\Delta P}{r\mu(L+L')} \quad \dots \Rightarrow t_{b)} = t_{a)} + \frac{r\mu L' V}{S\,\Delta P} \Rightarrow t_{b)} - t_{a)} = 777\,s$$

(Équation fondamentale avec largeur équivalente de filtre) $\quad \Rightarrow \underline{t_{b)} = 1h\,17min\,31\,s}$

4) Sans résistance de filtre : $D = \frac{dV}{dt} = \frac{S^2 \Delta P}{r \mu v V} = cste = \frac{V}{t}$

$\Rightarrow \quad V(t) = D \times t \quad$ et $\quad \Delta P(t) = \frac{D^2 r \mu v}{S^2} t$

$\Rightarrow \quad \boxed{t_1 = \frac{S^2 \Delta P}{D^2 r \mu v}} = \frac{0,5^4 \times 0,1 \times 10^5}{(5.10^{-5})^2 \times 2.10^{12} \times 10^{-3} \times 0,357} \simeq 350\,s \simeq 5\,min\,50\,s$

Calcul de D : $\quad D = 3\,L/min = \frac{3.10^{-3}}{60} = 5.10^{-5}\,m^3/s$

$V_1 = D t_1 = 0,0175 \simeq 17,5\,L$

puis étape à pression constante :

équation : $\quad \frac{t - t_1}{V - V_1} = \frac{r \mu v}{2 S^2 \Delta P}(V - V_1) + \frac{r \mu v V_1}{S^2 \Delta P}$

$\Rightarrow \quad t = \frac{r \mu v}{2 S^2 \Delta P}(V - V_1)^2 + \frac{r \mu v V_1 (V - V_1)}{S^2 \Delta P} + t_1$

$\Rightarrow \quad t = 4049\,s \simeq 1\,h\,7\,min\,29\,s$

Avec résistance de filtre : équation de filtration : $\frac{1}{D} = \frac{r \mu v}{S^2 \Delta P} V + \frac{r \mu L'}{S \Delta P}$

$\Rightarrow \quad \frac{r \mu v}{S^2 \Delta P} V = \frac{1}{D} - \frac{r \mu L'}{S \Delta P} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_1 = \frac{S^2 \Delta P}{r \mu v D} - \frac{S L'}{v}}$

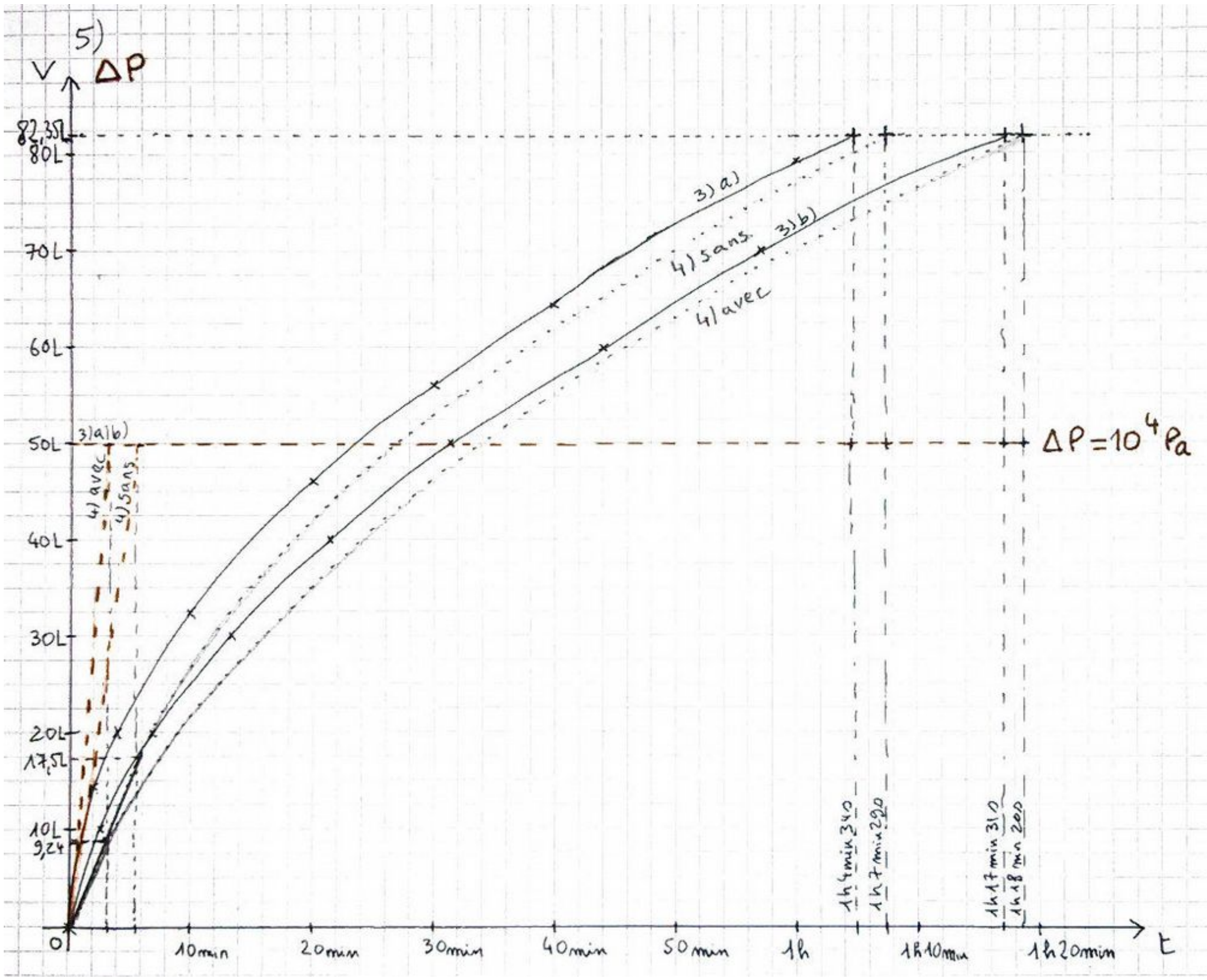
$\Rightarrow \quad V_1 = 9,24\,L \quad \Rightarrow t_1 = \frac{V_1}{D} = 184,8\,s$

$t_1 = 3\,min\,4,8\,s$

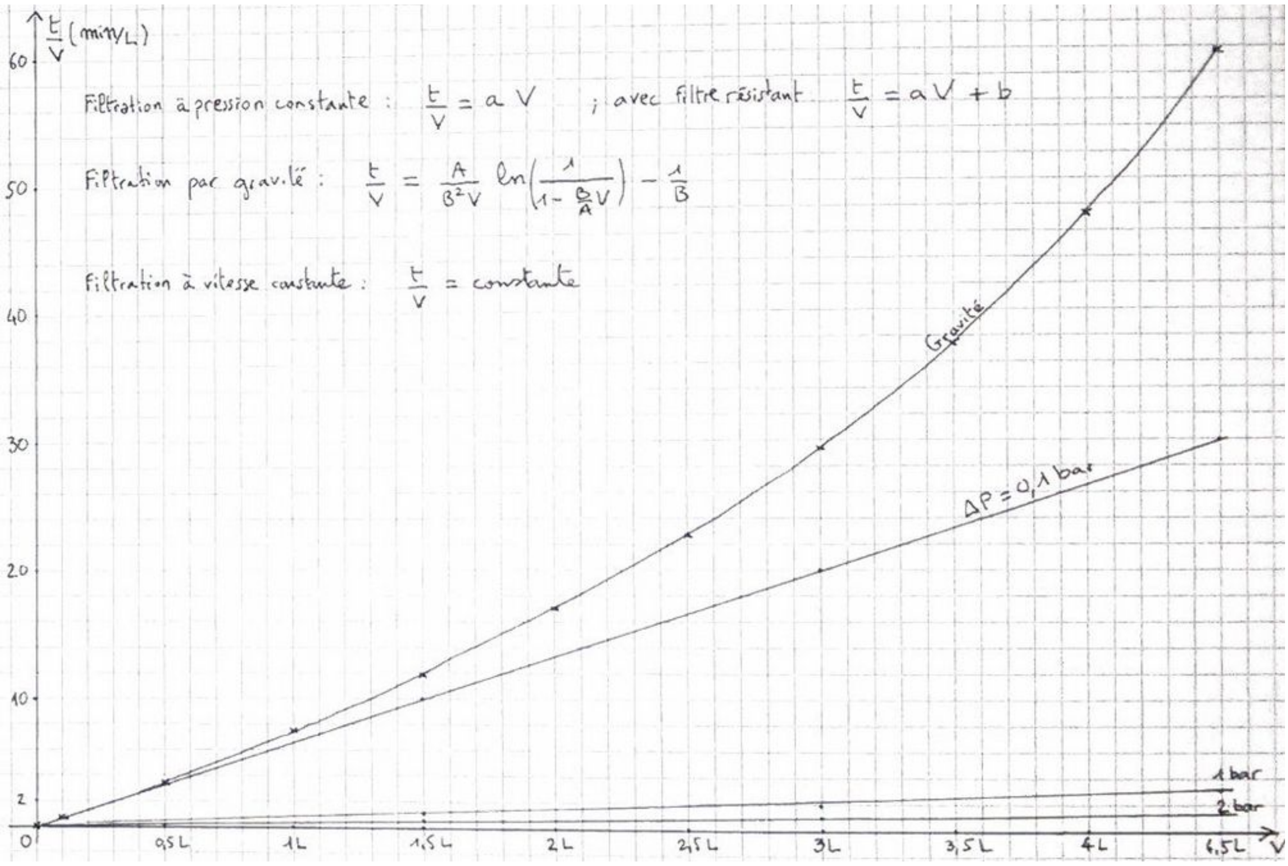
équation : $\quad t = \underbrace{\frac{r \mu v}{2 S^2 \Delta P}(V - V_1)^2 + \frac{r \mu v V_1 (V - V_1)}{S^2 \Delta P}}_{3824,8\,s} + \underbrace{\frac{r \mu L'}{S \Delta P}(V - V_1)}_{690,2} + t_1$

$\Rightarrow \quad t = 4700\,s$

$\Rightarrow \quad t = 1\,h\,18\,min\,20\,s$



Travaux Pratiques (courbes) :



Travaux Pratiques: 1. $\underline{N} = \dfrac{V_{billes}}{V_{1\,bille}} = \dfrac{1.10^{-3}\,m^3}{\frac{4}{3}\pi(0{,}5.10^{-3})^3} \simeq 1{,}9$ million

2. $V_{mélange} = V_{billes} + V_{eau} = \pi R^2 \times h \Rightarrow h = \dfrac{V_b + V_e}{\pi R^2} = \dfrac{(1+7).10^{-3}}{\pi \times 0{,}05^2}$

$\Rightarrow \underline{h \simeq 1{,}02\ m}$

3. $\varepsilon = \dfrac{V_{vide}}{V_{gâteau}}$ $\quad V_{mélange} = V_{billes} + V_{eau}$ $\quad V_g = V_b + V_v$

$V_v = V_g - V_b$

$\Rightarrow \varepsilon V_g = V_g - V_b \Rightarrow \varepsilon = 1 - \dfrac{V_{billes}}{V_{gâteaux}} = 1 - V_b/SL$

$\varepsilon = 1 - \dfrac{1.10^{-3}}{\pi . 0{,}05^2 \times 0{,}187} \Rightarrow \underline{\varepsilon \simeq 0{,}32}$ $\quad \varepsilon \geqslant \varepsilon_{min} = 1 - C = 0{,}26$

4. $v = \dfrac{V_g}{V} = \dfrac{\pi R^2 \times L}{V_e} = \dfrac{\pi \times 0{,}05^2 \times 0{,}187}{7.10^{-3}} \Rightarrow \underline{v \simeq 0{,}210}$

5. $(\Delta P)_{max} = \rho g h$ (par gravité) $\quad (\Delta P)_{max} = 1000 \times 9{,}81 \times 1{,}02 \simeq 10^4 \simeq 0{,}1\,bar$

par gravité : $(\Delta P)_{max} \simeq 0{,}10\,bar$

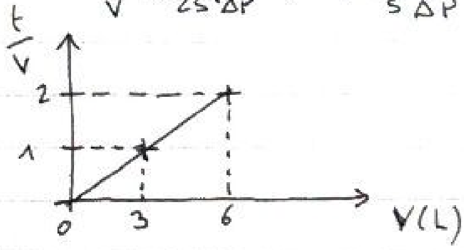
par vide : $\Delta P \simeq 1 - \frac{12}{760} \times 1{,}013.10^5\,Pa \simeq 0{,}98\,bar$ $\quad (\Delta P = P_{amont} - P_{aval})$

par surpression : $\Delta P = 2{,}00\,bar$

La surpression due à la gravité vaut 10% à celle avec la trompe à vide et 5% pour la pompe. Des précisions du même ordre pour les résultats.

6. Pour une filtration à pression constante avec résistance de filtre :

$\dfrac{t}{V} = \dfrac{r\mu v}{2S^2\Delta P} V + \dfrac{r\mu L'}{S\,\Delta P}$ $\quad y = \dfrac{t}{V} = aV + b$ $\quad x = V$



$t_1 = 3\,min$ et $V_1 = 3L \Rightarrow t_1/V_1 = 1\ min/L$

$t_2 = 12\,min$ et $V_2 = 6L \Rightarrow t_2/V_2 = 2\ min/L$

$\Rightarrow$ l'ordonnée à l'origine est nulle $\Rightarrow b = 0 \Rightarrow \underline{L' = 0}$

$\Rightarrow$ résistance de filtre négligée

$a = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1\,min/L}{3L} = \dfrac{r\mu v}{2S^2\Delta P} \Rightarrow \boxed{r = \dfrac{2aS^2\Delta P}{\mu v}} \Rightarrow \underline{r \simeq 2{,}35.10^{12}\ m^{-2}}$

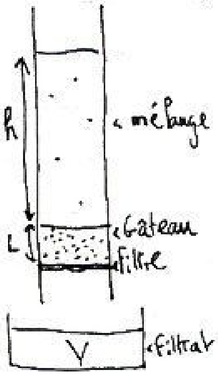
$\Rightarrow a \simeq \frac{1}{3}\dfrac{60\,s}{10^{-6}\,m^6} \simeq 2.10^7\ s.m^{-6}$

7. $t = \dfrac{r\mu v}{2S^2\Delta P} V^2$ $\quad$ si $V = 3L$: $t_1 = \dfrac{2{,}35.10^{12} \times 10^{-3} \times 0{,}21 \times (3.10^{-3})^2}{2 \times (\pi \times 0{,}05^2)^2 \times 0{,}98 \times 10^5} \simeq 367\,s$

$\underline{t_1 \simeq 6\,min\,7\,s}$

de même : $\underline{t_2} = 1470\,s \simeq \underline{24\,min\,30\,s}$

8.a) $V_{mélange}(t=0) = V_0 = \overbrace{S\,h(t)}^{V_{mélange}(t)} + \overbrace{S\,L(t)}^{V_g(t)} + \overbrace{V(t)}^{\text{Volume du filtrat}}$ or $\Delta P = \rho g h$



$\Rightarrow h = \frac{V_0}{S} - L - \frac{V}{S} = \frac{V_0}{S} - (1+\nu)\frac{V}{S}$ car $\nu = \frac{V_g}{V} = \frac{LS}{V}$

$\Rightarrow \Delta P = \frac{\rho g V_0}{S} - \frac{\rho g (1+\nu)}{S} V$ (valable tant que le gâteau reste humide)

b) Équation fondamentale : $\frac{dV}{dt} = \frac{S^2 \Delta P}{r \mu \nu V} = \frac{\rho g V_0 S}{r \mu \nu} \times \frac{1}{V} - \frac{\rho g (1+\nu) S}{r \mu \nu}$

$\Rightarrow \underline{A = \frac{\rho g V_0 S}{r \mu \nu}} \simeq 1{,}249.10^{-9}\ m^6/s$; $\underline{B = \frac{\rho g (1+\nu) S}{r \mu \nu}} \simeq 1{,}889.10^{-7}\ m^3/s$

c) $\frac{dV}{dt} = \frac{A}{V} - B \Rightarrow \frac{V}{A - BV}\, dV = dt \Rightarrow \int_0^V \frac{V}{V - A/B}\, dV \times \left(-\frac{1}{B}\right) = \int_0^t dt = t$

$\Rightarrow \int \frac{V - A/B + A/B}{V - A/B}\, dV = \int \left[1 + \frac{-A/B}{-V + A/B}\right] dV = -Bt$

$\Rightarrow [V]_0^V + \frac{A}{B}\left[\ln(-V + A/B)\right]_0^V = -Bt \Rightarrow V + \frac{A}{B} \ln \frac{-V + A/B}{A/B} = -Bt$

$\Rightarrow \underline{t = \frac{A}{B^2} \ln\left(\frac{1}{1 - (B/A)V}\right) - \frac{V}{B}}$

$A/B \simeq 6{,}61\ L$

$t(3L) = t_1 = 5282\ s \simeq 1h\,30\,min$

$t(6L) = t_2 = 51500\ s \simeq 14\ h$

$t(V_{f,gh}) = 120000\ s \simeq 33\ h$

$V_{filtrat\ gâteau\ humide} = 7L - \varepsilon V_g = 7.10^{-3} - 0{,}32 \times \pi \times 0{,}05^2 \times 0{,}187 \simeq 6{,}53\ L$

9.

	t_1 à 3 L	t_2 à 6 L
Surpression de 2 bar	3 min	12 min
Dépression de 0,98 bar	6 min 7s	24 min 30s
Par gravité	1h30min	14h

La filtration par gravité est facile à mettre en oeuvre, ne demande pas de matériel particulier et ne consomme pas directement d'énergie. Par contre la méthode est très lente, une demi-journée au lieu de 6 min à 2 bar.