

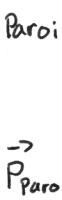
Pression cinétique

- hypothèses :
- Particules identiques, ponctuelles et sans interactions entre-elles
 - Distribution des vitesses des particules stationnaire, homogène et isotrope.

Introduction:

Considérons, tout d'abord, le cas d'un atome qui rentre entre en collision avec la paroi de front, paroi supposée plane, et les chocs particule-paroi parfaitement élastiques:

$$\mathcal{S} = \{ \text{particule} \oplus \text{paroi} \} ; \quad \mathcal{S} \text{ isolé}$$

\mathcal{S} état initial : $\vec{p}_i = m\vec{v}$ 

$$\vec{p}_{\text{paroi}i} = \vec{0}$$

$$\vec{p}_{\mathcal{S}i} = m\vec{v} + \vec{0} = m\vec{v}$$

\mathcal{S} état final : $\vec{p}_f = -m\vec{v}$ 

$$\vec{p}_{\text{paroi}f} = -m\vec{v} + \vec{p}_{\text{paroi}i}$$

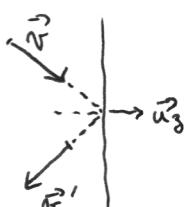
Le \mathcal{S} étant isolé la quantité de mouvement conserve, d'où :

$$\vec{p}_{\mathcal{S}i} = \vec{p}_{\mathcal{S}f} \Rightarrow m\vec{v} = -m\vec{v} + \vec{p}_{\text{paroi}f} \Rightarrow \vec{p}_{\text{paroi}f} = 2m\vec{v}$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{p}_{\text{paroi}} = \vec{p}_{\text{paroi}f} - \vec{p}_{\text{paroi}i} = 2m\vec{v}$$

Finlement comparé à la quantité de mouvement de la particule incidente, celle de la paroi est doublee.

Dans le cas d'un choc non frontal : $\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$

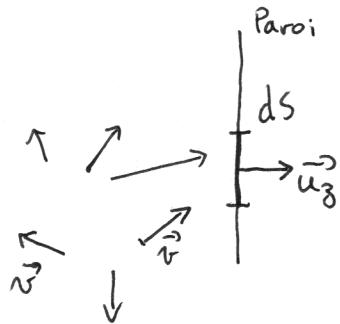


$$m\vec{v} = m\vec{v}' + \vec{p}_{\text{paroi}f} \Rightarrow \Delta \vec{p}_{\text{paroi}} = 2m v_z \vec{u}_z$$

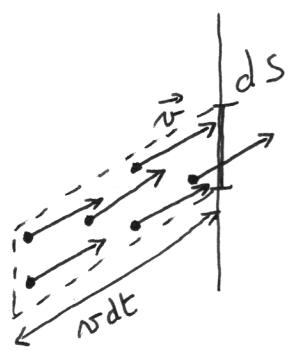
Ce résultat est vrai pour une particule atomique ou polyatomique, la conservation de la quantité de mouvement étant toujours vérifiée.

Supposons que le choc ait lieu pendant une durée très brève Δt , il s'engendra alors une force sur la paroi : $\vec{F}_{\text{paroi}} = \frac{\Delta \vec{p}_{\text{paroi}}}{\Delta t}$ qui correspond à une force pressante associée aux forces de pression : $\vec{F} = P S \vec{u}_z$, S : surface de la paroi P : pression exercée sur cette paroi.

Cas de l'ensemble des particules: Nous recherchons la quantité de m_t transmise à la paroi pendant dt par un grand nombre de particules. Nous considérons les particules entrant en collision avec une surface élémentaire dS de cette paroi.



Toutes les molécules ne vont pas entrer en collision avec dS : on doit avoir $n_3 > 0$. Ensuite elles doivent être correctement dirigées et avoir le temps pendant dt d'atteindre dS. Nous effectuons une partition des atomes suivant leur vitesse \vec{v} :



Volume élémentaire où sont contenues les particules de vitesse \vec{v} qui nous intéressent:

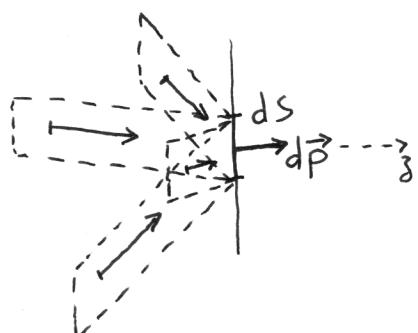
$$dV = (\vec{v} dt) dS \times \cos\theta = \vec{v} dt \cdot \vec{u}_3 dS$$

$$\Rightarrow dV = n_3 dt dS$$

Nombre de particules considérées dans dV :

$$dN_{\vec{v}} = n_{\vec{v}}^* dV \quad \text{où } n_{\vec{v}}^* \text{ est la densité de particules de vitesse } \vec{v}.$$

D'où la quantité de m_t de particules incidentes : $d\vec{P}_{\vec{v}} = (m \vec{v}) dN_{\vec{v}}$
On procède de même sur toutes les vitesses :



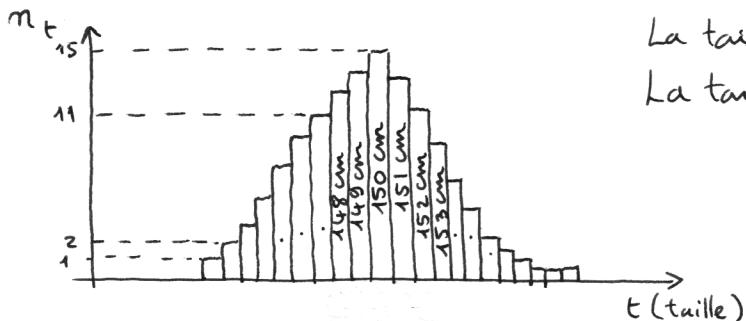
Par isotropie de la distribution des vitesses, autant de particules arrivent du haut, du bas, de l'avant et du fond, d'où ce qui est assez intuitif,

$$d\vec{P} \text{ est selon } \vec{u}_3, \Rightarrow d\vec{P} = (d\vec{P} \cdot \vec{u}_3) \vec{u}_3$$

$$\Rightarrow d\vec{P} = m \left[\sum_{\vec{v}} n_{\vec{v}}^* v_3^2 \right] dt dS \vec{u}_3$$

Pour un échantillon statistique nous avons une moyenne pondérée : $\langle v_3^2 \rangle = \frac{\sum n_{\vec{v}}^* v_3^2}{\sum n_{\vec{v}}^*}$

Pour comprendre cette moyenne statistique prenons un exemple : supposons que l'on mesure la taille, à 1 cm près, de tous les élèves d'une école afin d'obtenir la courbe de distribution des tailles des élèves :



La taille la plus probable t_p est $t_p = 150 \text{ cm}$.
La taille moyenne :

$$t_M = \frac{\sum (\text{toutes les tailles})}{N}$$

N : nombre total d'élèves.

n_t est la fréquence de la taille t : par exemple $n_{t=150 \text{ cm}} = 15$ (élèves)
("le poids", moyenne pondérée)

$$n_{t=147 \text{ cm}} = 11$$

$$\Rightarrow N = \sum_t n_t ; \quad \sum (\text{toutes les tailles}) = \sum_t (n_t \cdot t)$$

$$\Rightarrow \left[t_M = \frac{\sum n_t \cdot t}{\sum n_t} \right] \quad \text{à priori: } t_M \neq t_p ; \quad \begin{matrix} \text{ici on a d'après la courbe} \\ t_M < t_p \end{matrix} ; \quad t_M = \langle t \rangle, \quad \text{si on désirait, la moyenne de la} \\ \text{taille au carré } t^{*2}, \text{ ce qui n'a pas beau-} \\ \text{coup d'intérêt dans ce cas !,} \quad t^{*2} = \langle t^2 \rangle = \frac{\sum n_t \cdot t^2}{\sum n_t}$$

C'est ainsi que l'on a procédé pour $\langle v_3^2 \rangle$.

Nous avons ici des sommes (\sum) correspondant à des tailles, ou vitesses, discrétisées. En fait la distribution des vitesses est continue et il faudrait utiliser des intégrales (\int) :

Pour $v = \|\vec{v}\|$:

$$v_M = \frac{\int v dN_v}{\int dN_v} = \langle v \rangle$$

$$v^{*2} = \frac{\int_{v=0}^{+\infty} v^2 dN_v}{\int_{v=0}^{+\infty} dN_v} = \langle v^2 \rangle$$

$$\rho(v) \uparrow$$

$\rho(v)$: densité de particules possédant la vitesse v .

$$dN_v = \rho(v) dv$$

v_p / maximum de $\rho(v)$.

Revenons à notre calcul de pession cinétique : $\langle v_3^2 \rangle = \frac{\sum n_{\vec{v}}^* v_3^2}{\sum n_{\vec{v}}^*}$
 $\sum_{\vec{v}} n_{\vec{v}}^* = n^*/2$ car $v_3 > 0$.

$\Rightarrow d\vec{P} = m \frac{n^*}{2} \langle v_3^2 \rangle dt ds$, Nous avons vu dans l'introduction que les choos étant élastiques, les particules repartent de la paroi, sans perte de quantité de mouvement pour

l'ensemble, la quantité de mouvement transférée à la paroi est doublée. D'où : $d\vec{P} = m n^* \langle v_z^2 \rangle dt dS \vec{u}_z$
(ce vérifie aussi en reprenant le calcul point par point après le choc)

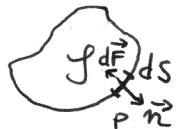
Pour la force exercée sur dS : $d\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ (RFD à la paroi)

$$\Rightarrow d\vec{F} = m n^* \langle v_z^2 \rangle dS \vec{u}_z$$

or la pression exercée sur un \mathcal{Y} est ainsi défini :

\vec{n} : normale unitaire sortante de \mathcal{Y} .

$$d\vec{F} = -P \vec{n} dS$$



P : pression extérieure à \mathcal{Y} .

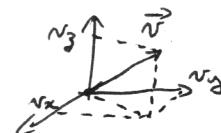
$$\text{Ici : } \mathcal{Y} = \{ \text{paroi} \} \Rightarrow d\vec{F} = -P (-\vec{u}_z) dS = P \vec{u}_z dS$$

$$\Rightarrow P = m n^* \langle v_z^2 \rangle \quad \text{pression exercée sur la paroi.}$$

$$\text{De plus : } \vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\Rightarrow \langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle$$



car la moyenne d'un somme est la somme des moyennes.

Or de part l'isotropie de la distribution des vitesses :

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \Rightarrow \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} v^*{}^2$$

où : v^* est la vitesse quadratique moyenne

$$v^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

d'où :

$$P = \frac{1}{3} m n^* v^*{}^2$$

Pression cinétique

Expression vraie pour tout gaz parfait, qu'il soit monoatomique ou polyatomique.

- remarques :
- La forme de la paroi ou le processus avant du choc n'ont pas d'importance : \vec{v}_{avant} (paroi) Il peut y avoir une étape d'adsorption (la molécule se fixe à la paroi) puis d'une désorption.
 - La distribution des vitesses $p(v)$ peut avoir une forme quelconque du moment qu'elle est statioinaire, homogène et isotrope.