

DEVOIR SURVEILLÉ

durée: 2 h 40

Physique

4 parties indépendantes.

A**Les questions de Zabou sur son escarpolette.**

Zabou se balance sans élan sur une escarpolette dont les cordes menacent de rompre si leur tension dépasse une certaine valeur.

I. Modélisation

Un fil inextensible, de masse négligeable, de longueur l , dont l'une des extrémités est liée à un point fixe O , porte à l'autre extrémité M une masse ponctuelle m .

Le pendule est lâché sans vitesse initiale, (OM) faisant l'angle θ_M avec la verticale.
Calculer, en fonction de θ :

1. la vitesse de M
2. la tension \vec{T} du fil.

Les réponses aux questions suivantes doivent nécessairement utiliser des résultats liés au modèle précédent.

II. Les questions de Zabou

1. Le risque de voir les cordes casser est-il plus grand au passage par la verticale ou aux points d'amplitude maximale?
2. Ce risque augmente-t-il si l'amplitude du mouvement est accrue?

III. La solution de Zabou

Devant la fragilité des cordes, Zabou juge bon de les raccourcir avant de recommencer à se balancer avec la même dénivellation verticale que précédemment.

Le risque de rupture des cordes est-il augmenté, diminué ou inchangé?

IV. Maturin s'en mêle

Maturin, le frère de Zabou, se balance à côté d'elle sur une balançoire identique. Maturin est plus lourd que Zabou. On les lâche simultanément sans élan à partir de positions initiales identiques. On néglige frottement et résistance de l'air.

1. Lequel passe à la verticale du point de suspension avec la plus grande vitesse?
2. Lequel revient le plus vite à sa position de départ?

- 3/ Point glissant sans frottement sur une sphère :
- Un point matériel de masse m se trouve au sommet S d'une sphère de centre C et de rayon R . La sphère est plongée dans un champ de pesanteur \vec{g} . Le point M est repéré par $\theta = (\vec{CS}, \vec{CM})$.
- 1) Donner l'expression du moment cinétique de M en C , tant que M est en contact avec la sphère, en se placant en coordonnées sphériques.
 - 2) Que dire de $\dot{\theta}_c$ si le mouvement est dans un plan vertical ?
Quelles sont les conditions sur $\varphi(t)$ et $\theta(t)$ pour que le mouvement soit dans un plan vertical ?
 - 3) On communique initialement une vitesse \vec{v}_0 horizontale.
 - a) Le mouvement est-il plan ?
 - b) En utilisant le théorème du moment cinétique déterminez l'équation du mt.
 - c) Expression de $\dot{\theta}(t)$
 - d) Esprimez la réaction en fonction de m , g , v_0 , R et θ .
Pour quelle valeur θ_0 le point decolle-t-il ?
 - e) Que vaut $\dot{\theta}_0$ si $v_0 = 0$? AN.

Mouvement apparent du Soleil

Dans le référentiel de Copernic R_c , lié au centre S du Soleil, le centre T de la Terre décrit une orbite supposée circulaire.

La révolution de la Terre autour du Soleil s'effectue en $T = 365$ jours solaires $\frac{1}{4}$; le vecteur rotation associé est noté $\vec{\Omega}$.

Le vecteur rotation associé au jour solaire, noté j_{sol} , d'une durée de 24 h, est noté $\vec{\Omega}_1$.

L'axe de rotation de la Terre sur elle-même est incliné d'un angle $\alpha = 23^{\circ}26'$ par rapport à la normale au plan de l'écliptique.

Nous prendrons, de plus, pour la distance Terre-Soleil : $(ST) = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$.

Notations :

R_g : référentiel géocentrique

R_T : référentiel terrestre

R_{ST} : référentiel d'origine S et tournant avec l'axe (ST).

1) Expression de la vitesse et de l'accélération de T dans (R_c) .

A.N.

2) On note $\vec{\Omega}_2$ le vecteur rotation associé au jour sidéral, noté j_{sid} .

a) Que dire de : $\vec{\Omega}_{RT/R_g}$, $\vec{\Omega}_{R_{ST}/R_c}$, $\vec{\Omega}_{R_g/R_c}$, $\vec{\Omega}_{R_T/R_{ST}}$

b) Quelle relation existe-t-il entre $\vec{\Omega}_1$, $\vec{\Omega}_2$ et $\vec{\Omega}_2$?

c) En déduire la norme de $\vec{\Omega}_2$, noté Ω_2 , en fonction de

j_{sol} , T et α .

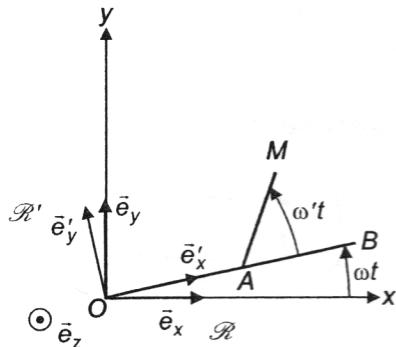
AN calculer j_{sid} .

D

Composition de mouvements de deux barres

Une barre OB de longueur $2a$ tourne autour d'un axe Oz à la vitesse angulaire ω constante. A est le milieu de OB . Une deuxième barre AM de longueur a tourne autour de l'axe (A, \vec{e}_z) à la vitesse angulaire ω' constante par rapport à la barre OB .

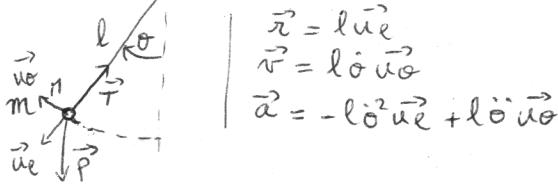
a) Calculer l'accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} : $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en utilisant le référentiel \mathcal{R}' : $(A, \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}_z)$ lié à la barre pour appliquer les formules de composition. On l'exprimera en fonction de ω , ω' , \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{OA} .



b) Calculer l'accélération du point M dans le référentiel \mathcal{R} : $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ en utilisant le référentiel \mathcal{R}'' : $(A, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ pour appliquer les formules de composition. On l'exprimera en fonction de ω , ω' , \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{OA} .

des questions de Zabou :

I-1 RFD: $m\ddot{\vec{a}} = \vec{P} + \vec{T}$



$$\Rightarrow \begin{cases} -ml\ddot{\theta}^2 = mg \cos \theta + (-T) \\ ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Expression de ω : $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = +\frac{g}{l} \cos \theta + \text{constante} ; \quad \dot{\theta}(t=0) = \omega_0 \Rightarrow \text{constante} = \frac{g}{l} \cos \theta_0$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{2 \frac{g}{l} (\cos \theta_0 - \cos \theta)}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{2gl (\cos \theta_0 - \cos \theta)}$$

2- Expression de T:

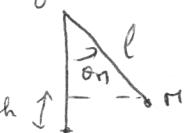
$$T = mg \cos \theta + ml^2 \frac{g}{l} (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow T = mg (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$$

II 1- $\cos \theta$ est maximum en $\theta = 0$

$\Rightarrow T(\theta)$ est maximum au passage par la verticale

2- Si l'amplitude θ_0 , $\cos \theta_0$ $\Rightarrow T(\theta=0) = mg(3-2\cos \theta_0)$ croît.
 \Rightarrow le risque augmente

III 

$$\cos \theta_0 = \frac{l-h}{l} = 1 - \frac{h}{l} \quad \text{si } h \downarrow \cos \theta_0 \uparrow \Rightarrow T(\theta) \text{ augmente}$$

Zabou a une mauvaise intuition: le risque est augmenté.

IV 1- Ils partent avec la même vitesse (v ne dépend pas de θ !)

2- Ils reviennent en même temps à la position de départ, la masse s'éloigne dans les équations du mt. Par contre la tension est plus élevée pour Nathalie.

Mouvement apparent du Soleil:

1) $\vec{r}_{(T)/R_c} = \vec{\omega} \times \vec{s_T}$ $\vec{a}_{(T)/R_c} = -\omega^2 \vec{s_T}$

AN: $\omega = \omega(s_T)$ $\omega = \frac{2\pi}{T} (s_T) \Rightarrow \omega \approx 29,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
 $a = \omega^2 (s_T)$ $\Rightarrow a = 5,05 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

2)a) $\vec{r}_{R_T/R_g} = \vec{s}_2$; $\vec{r}_{R_{ST}/R_c} = \vec{s}_2$; $\vec{r}_{R_{gj}/R_c} = \vec{0}$; $\vec{r}_{R_T/R_{ST}} = \vec{s}_1$

b) $\vec{r}_{R_T/R_c} = \vec{r}_{R_T/R_{ST}} + \vec{r}_{R_{ST}/R_c} = \vec{s}_2_{R_T/R_g} + \vec{s}_{R_{gj}/R_c}$
 $\Rightarrow \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \vec{s}_2$

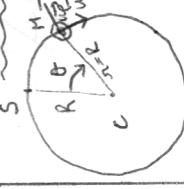
c) $\omega_2^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \alpha \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \cos \alpha}$

$$\Rightarrow \left| \omega_2 = \sqrt{\frac{(2\pi)^2}{J \omega_1^2} + \frac{(2\pi)^2}{T^2} + 2 \frac{(2\pi)^2}{J \omega_1 T} \cos \alpha} \right| = 2\pi \sqrt{\frac{1}{J \omega_1^2} + \frac{1}{T^2} + \frac{2}{J \omega_1 T} \cos \alpha}$$

AN: $J \omega_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ $J \omega_1 = 86183 \Rightarrow 23h56'23''$

Joint glissant sans freinements ni frottements

Composition de mouvement de deux droites :



a) \mathcal{R} : $(O, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ est le référentiel « absolu » et $(A, \bar{e}'_x, \bar{e}'_y, \bar{e}'_z)$ est en mouvement de rotation uniforme avec un vecteur rotation instantané $\bar{\omega} = \omega \bar{e}_z$ par rapport à \mathcal{R} . L'accélération absolue de M se décompose donc en :

$$\ddot{a}_a(M) = \ddot{a}_r(M) + \ddot{a}_e(M) + \ddot{a}_c(M), \text{ avec :}$$

$\ddot{a}_r(M) = -\omega'^2 \overrightarrow{AM}$ car le mouvement de M par rapport à \mathcal{R}' est circulaire uniforme autour de A , à la vitesse angulaire ω' .

$\ddot{a}_e(M) = -\omega^2 \overrightarrow{OM}$ car le mouvement du point coïncidant M^* est circulaire uniforme autour de O , à la vitesse angulaire ω .

$$\ddot{a}_c(M) = 2\omega \bar{e}_z \wedge (\omega' \bar{e}'_z \wedge \overrightarrow{AM}) = -2\omega\omega' \overrightarrow{AM}, \text{ en utilisant la formule du double produit vectoriel } \bar{A} \wedge (\bar{B} \wedge \bar{C}) = \bar{B}(\bar{A} \cdot \bar{C}) - \bar{C}(\bar{A} \cdot \bar{B}). \text{ Finalement :}$$

$$\ddot{a}_a(M) = -\omega'^2 \overrightarrow{AM} - \omega^2 \overrightarrow{(OA + AM)} - 2\omega\omega' \overrightarrow{AM}, \text{ soit :}$$

$$\ddot{a}_a(M) = -(\omega + \omega')^2 \overrightarrow{AM} - \omega^2 \overrightarrow{OA}.$$

b) \mathcal{R} : $(O, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ est le référentiel « absolu » et $(A, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ est en mouvement de translation circulaire uniforme par rapport à \mathcal{R} . L'accélération absolue de M se décompose donc en :

$$\ddot{a}_a(M) = \ddot{a}_r(M) + \ddot{a}_e(M) + \ddot{a}_c(M), \text{ avec :}$$

$\ddot{a}_r(M) = -(\omega + \omega')^2 \overrightarrow{AM}$ car la barre AM est en rotation uniforme par rapport à $(A, \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ avec un vecteur rotation instantané $(\omega + \omega')\bar{e}_z$.

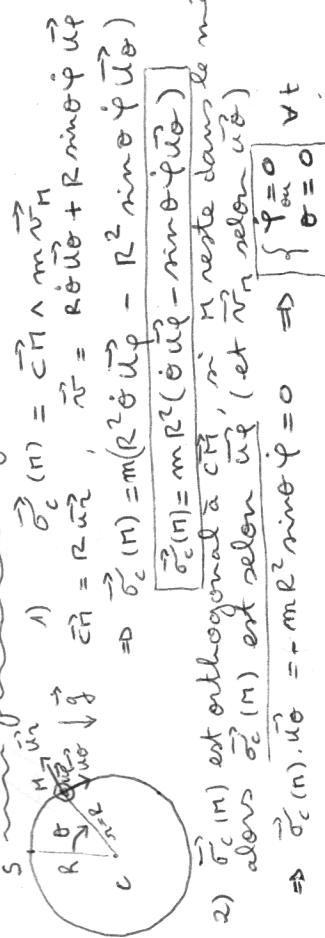
$\ddot{a}_e(M) = \ddot{a}_a(A) = -\omega^2 \overrightarrow{OA}$ car le mouvement du point coïncidant M^* se déduit de celui de A par une translation.

$$\ddot{a}_c(M) = 0 \text{ car } \mathcal{R}'' \text{ est en mouvement de translation par rapport à } \mathcal{R}.$$



$\ddot{a}_e(M) = \ddot{a}_a(A) = -\omega^2 \overrightarrow{OA}$ car le mouvement du point coïncidant M^* se déduit de celui de A par une translation.

$$\ddot{a}_c(M) = 0 \text{ car } \mathcal{R}'' \text{ est en mouvement de translation par rapport à } \mathcal{R}.$$



3) a) Le mouvement est plan si le moment cinétique reste nul selon \mathcal{R} . Voyons comment évolue le moment cinétique avec le temps :

$$\frac{d\vec{\Theta}}{dt} = \vec{M}_F$$

$$\vec{M}_F = \vec{cn} \wedge (\vec{R} + \vec{P}) = \vec{cn} \wedge \vec{P}$$

$$\vec{P} = \vec{mg} = -mg \bar{e}_3 = -mg(\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j})$$

$$\Rightarrow \vec{M}_F = +mg R \sin \theta \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{\Theta}(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\ddot{\Theta} = \frac{\partial}{\partial t} \sin \theta$$

$$b) \Rightarrow \vec{\Theta}(t) = \frac{\partial}{\partial t}(\sin \theta) \hat{e}_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{e}_r = \left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right]_0^t \hat{e}_r = \left[\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right]_0^t \hat{e}_r$$

$$\Rightarrow \ddot{\Theta}(t) = \sqrt{\frac{2\dot{\theta}}{R}}(\dot{\theta} - \cos \theta) + \frac{v_0^2}{R^2} \hat{e}_r$$

$$d) \text{ RFD : } m\ddot{a} = \frac{m v^2}{R} \hat{e}_r + m\ddot{g} = m(\dot{\theta}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{n}) = R\vec{N} + mg(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$$

$$\Rightarrow R_N = -mg(1 - \cos \theta) - \frac{mv^2}{R} \cos \theta \quad \dots$$

$$N = R\dot{\theta} \quad \dots$$

$$\theta d \Rightarrow R_{2N} = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta d = \frac{v_0^2}{\frac{3}{2}R} \approx 48^\circ$$

$$2) \theta d = \arccos \frac{2}{3} \Rightarrow \theta d \approx 48^\circ$$