PCSI
durée : 2 heures

Devoir Surveillé de Physique

10/3/2001

A - Oscillateur mécanique

Un anneau M assimilable à un point matériel, de masse m, peut coulisser le long d'une tige horizontale x'x. Il est relié à l'extrémité d'un ressort d'axe x'x, de masse négligeable, de coefficient de raideur k, de longueur à vide l_v, l'autre extrémité étant fixe. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On donne $\omega_0^2 = 5$ SI.

On pose $\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x$, O étant la position de M à l'équilibre et $\vec{u}_x$ un vecteur unitaire de la droite x'x. A un instant pris comme origine des temps, on écarte l'anneau de sa position d'équilibre.

1. Les frottements sont supposés négligeables.

   a) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par l'élongation x.

   b) En déduire littéralement puis numériquement la loi horaire x(t), sachant qu'à t = 0, $x = x_0 = 5.10^{-2}$ m et $v_x = v_{x0} = -3.10^{-2}$ m.s^{-1}. Déterminer l'instant t_1 au bout duquel x s'annule pour la première fois.

   c) Etablir l'équation de la trajectoire de phase correspondant à ce mouvement. La représenter en tenant compte des valeurs numériques données et en précisant les points correspondant à l'instant t = 0 et l'instant $t = t_1$.

2. En fait les frottements ne sont pas négligeables, mais équivalents pour M à une force de frottement de type fluide linéaire $-h\vec{v}$.

   a) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par l'élongation x en utilisant les notations déjà définies. On posera $\lambda = \frac{h}{2m}$.

   b) On donne $\lambda = 1$ SI. En déduire la nature du mouvement de M et donner l'expression numérique complète de x(t), sachant qu'à t = 0, $x = x_0 = 5.10^{-2}$ m et $v_x = v_{x0} = -3.10^{-2}$ m.s^{-1}.

   c) Représenter l'allure de la trajectoire de phase correspondant à ce mouvement (le calcul de l'équation de la trajectoire n'est pas demandé).

   (trajectoire de phase : trajectoire dans l'espace des phases)

3. L'anneau est soumis par un dispositif adéquat, à une force supplémentaire $\vec{F} = F_m \cos(\omega_e t)\vec{u}_x$.

   a) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par l'élongation x.

   b) En déduire qu'en régime permanent, l'élongation est de la forme $x(t) = A\cos(\omega_e t+\varphi)$. On exprimera A et φ en fonction de grandeurs déjà introduites.

   c) ω_0 et λ ayant les valeurs numériques données précédemment, peut-on observer le phénomène de résonance d'élongation? Si oui, pour quelle pulsation? Tracer l'allure du graphe de A en fonction de ω_e, les autres paramètres étant fixés. Indiquer comment est modifié ce graphe lorsque le coefficient λ tend vers zéro.

   d) Quel est le travail fourni par unité de temps par la force $\vec{F}$? Donner l'expression de sa valeur moyenne sur une période en fonction de m, λ, ω_e et A. Montrer que ce travail compense exactement sur une période celui de la force de frottement fluide.

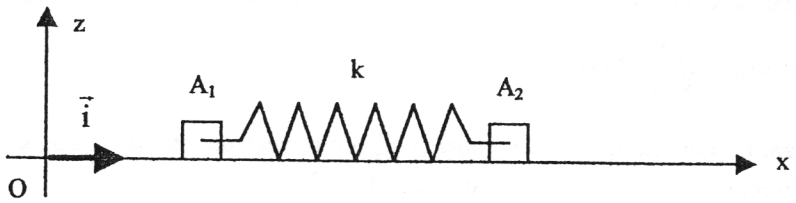
A **B. Solides reliés par un ressort**

(exo analogue)

Correction DL janvier 2008

On considère deux solides A_1 et A_2 reliés par un ressort, assimilés à des points matériels de masse m_1 et m_2, pouvant glisser sans frottement sur un plan horizontal xOy et reliés entre eux par un ressort de constante de raideur k, de masse négligeable et de longueur naturelle r_0.

Le système est immobile par rapport à un référentiel R lié au laboratoire, les deux solides étant sur l'axe Ox. On écarte alors les deux solides à t=0 de sorte que $\overrightarrow{A_1A_2} = b.\vec{i}$, $\vec{i}$ étant un vecteur unitaire de Ox et $b > r_0$ et on les lâche sans vitesse initiale.



1°) Soient x_1 et x_2 les abscisses de A_1 et A_2.

a) Déterminer l'abscisse x_C du centre de masse C du système en fonction de x_1, x_2, m_1 et m_2.

b) Déterminer la vitesse $\vec{v}_C$ de ce centre de masse en fonction des vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ de A_1 et A_2, et des masses m_1 et m_2.

c) Que peut-on dire des variations de $\vec{v}_C$ dans le temps ? (Justifier la réponse). En déduire une relation entre $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

2°) **a)** On désigne par $\vec{w}$ la vitesse relative de A_2 par rapport à A_1. Exprimer $\vec{w}$ en fonction de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

b) Exprimer les quantités de mouvement $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ de A_1 et A_2 dans le référentiel R, en fonction de $\vec{W}$ et de la masse réduite du système : $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

c) Soit $\vec{F}_1$ la force exercée par le ressort sur A_1 et $\vec{F}_2$ la force exercée par le ressort sur A_2. Que peut-on dire de $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$? (Justifier la réponse)

3°) **a)** Montrer que l'étude du mouvement du système pourra se déduire de celui d'une particule fictive M de masse μ, soumise à la force $\vec{F}_2$, dont la position est définie par $\overrightarrow{CM} = \vec{r} = \overrightarrow{A_1A_2}$. (Le résultat pourra être admis pour la suite du problème)

b) En déduire l'équation différentielle vérifiée par $r = \|\vec{r}\|$

c) Déterminer l'expression de r (t). On tiendra compte des conditions initiales indiquées au début du problème et on posera : $\omega^2 = \dfrac{k}{\mu}$

d) En déduire les expressions de x_1 et x_2 en fonction du temps (On prendra O confondu avec le centre de masse C).

e) Que peut-on dire des phases de A_1 et A_2 ?

4°) *Application numérique* : on admettra que ce système peut servir de modèle pour représenter une molécule HCl. On donne : les masses atomiques de H et de Cl en $g.mol^{-1}$: 1 et 35,5 ; le nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6.10^{23}$ mol^{-1} ; la fréquence d'oscillation de la molécule $N = 9.10^{13}$ s^{-1}.

En déduire la force d'interaction entre les deux atomes quand leur distance est :

$r = r_0 + 0{,}3\,\mathring{A}$ $\quad (1\,\mathring{A} = 10^{-10}\,m)$

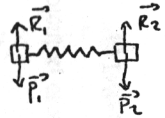
...s reliés par un ressort

1) a) $\vec{OC} = \dfrac{m_1\vec{OA_1} + m_2\vec{OA_2}}{m_1+m_2} \Rightarrow \vec{OG}\cdot\vec{i} = \boxed{x_C = \dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}}$

b) $\boxed{\vec{v_C} = \dfrac{d\vec{OC}}{dt} = \dfrac{m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}}{m_1+m_2}}$ (O fixe, vitesse par rapport à R)

c) Théorème du centre de masse au système {masses, ressort} dans R :

$M\vec{a_C} = \vec{R}_{ext}$, $M = m_1+m_2$, $\vec{a_C} = \dfrac{d\vec{v_C}}{dt}$



• Forces extérieures : $\vec{P_1}, \vec{P_2}, \vec{R_1}, \vec{R_2}$

pas de frottement $\Rightarrow \begin{cases} \vec{P_1}+\vec{R_1} = \vec{0} \\ \vec{P_2}+\vec{R_2} = \vec{0} \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{R}_{ext} = \vec{0} \rightarrow$ Système pseudo-isolé $\Rightarrow \vec{a_C} = \vec{0}$

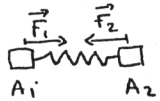
$\Rightarrow \vec{v_C} = \vec{cste} = \vec{v_C}(t=0)$

Or d'après les conditions initiales : $\vec{v_C}(t=0) = 0 \Rightarrow \boxed{m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2} = \vec{0}}$

2°) a) (R_1) référentiel en translation par rapport à (R) où A_1 est fixe :

$\vec{w} = \vec{v}_{A_2/R_1} = \dfrac{d\vec{A_1A_2}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\vec{A_2O}+\vec{OA_1}) \Rightarrow \boxed{\vec{w} = \vec{v_2}-\vec{v_1}}$

b) $\begin{cases} \vec{p_1} = m_1\vec{v_1} \text{ or } \vec{v_2} = -\dfrac{m_1}{m_2}\vec{v_1} \Rightarrow \vec{w} = -\left(\dfrac{m_1+m_2}{m_2}\right)\vec{v_1} \Rightarrow \\ \vec{p_2} = m_2\vec{v_2} \text{ or } \vec{v_1} = -\dfrac{m_2}{m_1}\vec{v_2} \Rightarrow \vec{w} = -\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\vec{v_2} \Rightarrow \end{cases} \boxed{\begin{cases} \vec{p_1} = -\mu\vec{w} \\ \vec{p_2} = +\mu\vec{w} \end{cases}}$

c) 

Principe des actions réciproques : $\boxed{\vec{F_1}+\vec{F_2} = \vec{0}}$

3°) a) $\begin{cases} \text{RFD à } A_1 : m_1\dfrac{d^2\vec{OA_1}}{dt^2} = \vec{F_1} \\ \text{RFD à } A_2 : m_2\dfrac{d^2\vec{OA_2}}{dt^2} = \vec{F_2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{d^2\vec{OA_2}}{dt^2} - \dfrac{d^2\vec{OA_1}}{dt^2} = \dfrac{\vec{F_2}}{m_2} - \dfrac{\vec{F_1}}{m_1}$

$\Rightarrow \dfrac{d^2}{dt^2}(\vec{A_1A_2}) = \vec{F_2}\left(\dfrac{1}{m_2}+\dfrac{1}{m_1}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F_2}\dfrac{m_1+m_2}{m_1m_2} \Rightarrow \boxed{\mu\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F_2}}$

On connait ainsi $\vec{r} = \vec{A_1A_2}$, comme : $\begin{cases} \vec{CA_1} = \vec{CO}+\vec{OA_1} = -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\vec{A_1A_2} \\ \vec{CA_2} = \vec{CO}+\vec{OA_2} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}\vec{A_1A_2} \end{cases}$

on connait les positions de A_1 et A_2.

b) $\vec{F_2} = -k(r-r_0)\vec{i}$; $\vec{r} = r\vec{i} \Rightarrow \mu\dfrac{d^2r}{dt^2} = -k(r-r_0)$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{r} + \dfrac{k}{\mu}(r-r_0) = 0}$

c) Soit : $r' = r - r_0 \Rightarrow \ddot{r'} + \dfrac{k}{\mu}r' = 0 \Rightarrow \begin{cases} r'(t) = A\cos(\omega t+\varphi) \ ; \ \omega = \sqrt{\dfrac{k}{\mu}} \\ A > 0 \ , \ \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases}$

$\Rightarrow r(t) = A\cos(\omega t+\varphi) + r_0$

C.I. : $r(0) = b$ $\dot{r}(0) = 0$

$\dot{r}(t) = -A\omega\sin(\omega t+\varphi)$ $\Rightarrow \begin{cases} b = A\cos\varphi + r_0 \\ 0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - r_0 = A\cos\varphi \\ 0 = -A\omega\sin\varphi \end{cases}$

• $b - r_0 > 0 \Rightarrow A \neq 0$ or $\omega \neq 0$ donc : $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ ou π

• Si : $\varphi = 0 \Rightarrow b - r_0 = A > 0$ possible

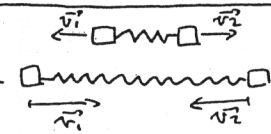
• Si : $\varphi = \pi \Rightarrow b - r_0 = -A < 0$ impossible

$\Rightarrow \boxed{r(t) = (b-r_0)\cos\omega t + r_0}$

d) 3°) a) $\overset{\text{sur } \vec{i}}{\Rightarrow}$ $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{m_2}{m_1+m_2}r \\ x_2 = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}r \end{cases}$ $\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = -\dfrac{\mu}{m_1}[(b-r_0)\cos\omega t + r_0] \\ x_2 = \dfrac{\mu}{m_2}[(b-r_0)\cos\omega t + r_0] \end{cases}}$

(O = C)

e) A_1 et A_2 sont en opposition de phase :



4°) $F_2 = k(r-r_0)$, $k = \mu(2\pi N)^2 = \dfrac{M_H M_{Cl}}{M_H+M_{Cl}}(2\pi N)^2$

$\Rightarrow \boxed{F_2 = \dfrac{M_H M_{Cl}}{M_H+M_{Cl}}\dfrac{(2\pi N)^2}{N_A}(r-r_0)}$ $\dfrac{M_H M_{Cl}}{M_H+M_{Cl}} = \dfrac{1}{N_A}\dfrac{M_H M_{Cl}}{M_H+M_{Cl}}$

A.N. : $F_2 = \dfrac{10^{-3}\times 35{,}5.\cancel{10^{-3}}}{36{,}5.\cancel{10^{-3}}}\dfrac{(2\pi.9.10^{13})^2}{6.10^{23}}0{,}3.10^{-10} \Rightarrow \boxed{F_2 = 1{,}6.10^{-8}\ N}$