PCS I

Devoir de Rattrapage

24/3/2003

Voyage Terre-Mars. Orbite de transfert d'Hohmann

Au cours d'un voyage interplanétaire, un vaisseau spatial de masse $m = 1$ t est transféré depuis la Terre jusqu'à la planète Mars. Ce transfert s'effectue suivant une orbite elliptique (ellipse d'Hohmann) tangente aux deux orbites coplanaires, pratiquement circulaires, de la Terre et de Mars, de rayons respectifs $R_1 = 1{,}5.10^8$ km et $R_2 = 2.3.10^8$ km, et dont le soleil est un foyer. On négligera l'attraction exercée par les planètes sur le vaisseau et on ne considérera que l'attraction solaire. On donne : masse du soleil $M = 2.10^{30}$ kg; constante de gravitation universelle $G = 6{,}67.10^{-11}$ S.I.

Déterminer, en fonction de R_1, R_2, G et M, puis calculer :

1) l'excentricité e et le paramètre p de l'orbite de transfert d'Hohmann, et la constante des aires de cette orbite :

2) la durée $\mathcal{T}$ de ce voyage interplanétaire Terre-Mars :

3) l'augmentation de vitesse qu'il faut communiquer au vaisseau

a) lors du lancement depuis la Terre ;

b) lors de son arrivée sur la planète Mars ;

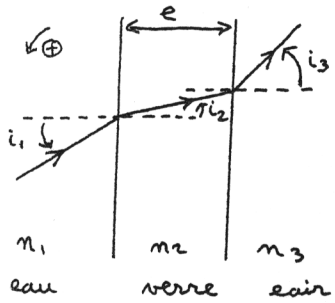
4) l'augmentation de l'énergie mécanique totale du vaisseau au cours de ce transfert ;

5) la position relative que doit avoir la planète Mars par rapport à la Terre à l'instant où le vaisseau quitte la terre.

↳

Poissons dans un aquarium

Soit un aquarium qui contient de l'eau d'indice n_1, et constitué d'une vitre d'épaisseur e et d'indice n_2.



I - Exprimez i_3 en fonction de i_1 et des indices n_1 et n_3.
Application Numérique pour : $i_1 = 40°$

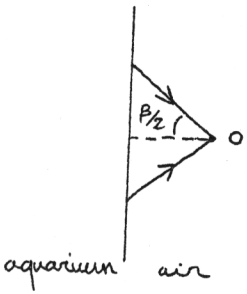
II - Déterminez l'expression de l'angle limite $i_{1\ell}$ pour lequel il n'y a pas de rayon émergent en fonction des données. De même pour $i_{2\ell}$.

données : $n_1 = \frac{4}{3}$ $n_2 = \frac{3}{2}$
$n_3 = 1$ $e = 3$ cm

Calculez les valeurs numériques de $i_{2\ell}$ et $i_{1\ell}$.
Faire un schéma de la marche des rayons pour $i_1 = i_{1\ell}$ puis $i_1 > i_{1\ell}$.

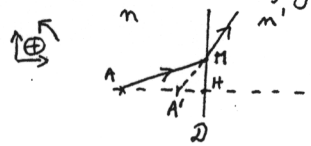
III - Expression de la déviation D entre le rayon incident et le rayon émergent. A.N. pour $i_1 = 40°$.

IV - Champ de vision : Un observateur O possède un angle de vision $\beta = 90°$. Sous quel angle β' voit-il alors l'intérieur de l'aquarium ? Faire un schéma (vous indiquerez la zone où nous ne voyons pas les poissons. Les poissons nous voient-ils alors ? Pourquoi ?)

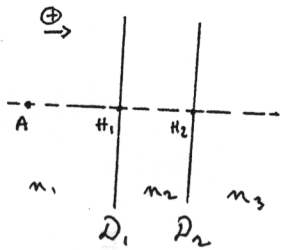


Sachant que la portion d'espace accessible à l'observateur est proportionnelle à $[1 - \cos\frac{\beta}{2}]$, en déduire la réduction du champ de vision obtenue.

V. Relation de conjugaison : Montrez que la relation de conjugaison du dioptre plan dans les conditions de Gauss est : $n'\,\overline{AH} = n\,\overline{A'H}$



VI - Nous considérons maintenant le système de deux dioptres plans parallèles qui constitue l'aquarium :



$\overline{AH_1} = d$
$\overline{H_1H_2} = e$

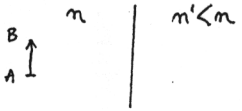
α) Donnez les relations de conjugaison pour chacun des dioptres.
$A \xrightarrow{D_1} A' \xrightarrow{D_2} A''$

β) Déterminez l'expression de $\overline{AA''}$ en fonction de e, d, n_1, n_2, n_3.

γ) Quelle est la distance $\overline{AA''}$ entre le poisson et son image si celui-ci est contre la vitre, puis à la distance $d = 1$m de celle-ci ?

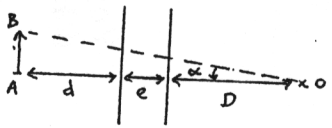
δ) Tracez la courbe $\overline{AA''}(d)$.

VII - Grandissement : Tracez l'image de l'objet AB pour un dioptre plan dans les conditions de Gauss. Quel est le grandissement γ ?



$\left(\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}\right)$

VIII - Grossissement : Nous nous plaçons à une distance D de l'aquarium.



α) Sous quel angle α verrions-nous le poisson AB s'il n'y avait pas d'aquarium (petits angles) ?

β) Sous quel angle α' voyons-nous l'image du poisson ?

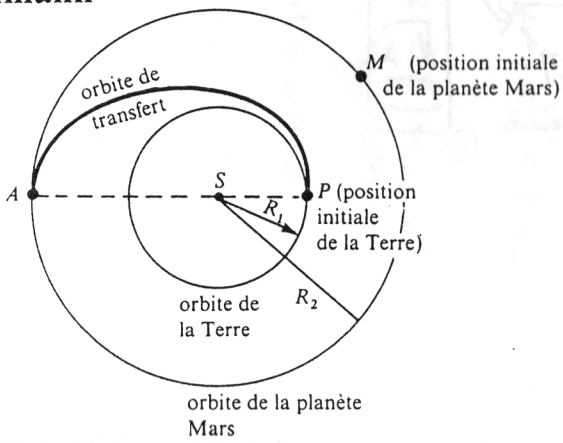
γ) Déterminez l'expression du grossissement $G = \alpha'/\alpha$ en fonction de e, d, D, n_1, n_2 et n_3.
A.N. : $D = 30$ cm, $d = 0$ m puis $d = 1$ m.

δ) Déterminez le grossissement maximal G_{max}. Où est alors placé le poisson ? G_{max} dépend-t-il de D ? de n_2 ?

28,5 pts

I

Voyage Terre-Mars. Orbite de transfert d'Hohmann



2

1) Soit P le point de lancement et A le point d'arrivée du vaisseau ; le transfert d'Hohmann s'effectue suivant l'orbite elliptique de périgée P, d'apogée A, de foyer S (soleil) et de grand axe :

1 $$AP = 2\,a = R_1 + R_2 \qquad (1)$$

on a (Fig. 6.24)

1 1 $$SP = R_1 = a(1 - e) \quad \text{et} \quad SA = R_2 = a(1 + e)$$

donc

1 AN 1 $$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1 - e}{1 + e}, \quad \text{d'où} \quad \boxed{e = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} = 0{,}21}.$$

- Le paramètre de l'orbite de transfert d'Hohmann est

$$p = a(1 - e^2) = \frac{R_1 + R_2}{2}\left[1 - \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1}\right)^2\right]$$

ou

1 AN 1 $$\boxed{p = \frac{2\,R_1.R_2}{R_1 + R_2}} = \mathbf{1{,}82.10^8\ km}.$$

- La constante des aires de l'orbite de transfert est

$$C = \frac{|\sigma_S|}{m} = SP.v_1 = R_1.v_1$$

où v_1, vitesse du vaisseau en P sur l'orbite elliptique juste après son lancement, est donnée par l'expression de l'énergie totale sur l'ellipse de transfert :

$$E = -\frac{GMm}{2\,a} = -\frac{GMm}{R_1} + \frac{1}{2}mv_1^2, \quad \text{soit} \quad v_1 = \sqrt{GM\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{a}\right)}$$

ou, d'après (1), ↳ Ou en utilisant : $E = \frac{\alpha}{2p}(e^2 - 1)$, $\alpha = GmM$

2 $$v_1 = \sqrt{2\,GM\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_1 + R_2}\right)}. \qquad (2)$$

La constante des aires est donc

AN 1 $$\boxed{C = \sqrt{2\,GM\,\frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2}}} = \mathbf{4{,}9.10^{15}\ m^2.s^{-1}}.$$

2) La durée $\mathcal{T}$ du voyage Terre-Mars entre P et A est égale à la demi-période orbitale du vaisseau : $\mathcal{T} = T/2$.

D'après la 3e loi de Kepler, on a :

$$\left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{vaisseau}} = \left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{Terre}}, \quad \text{soit} \quad \frac{(2\,\mathcal{T})^2}{\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^3} = \frac{1}{(R_1)^3}$$

2

car la période de rotation de la terre autour du soleil est 1 an ; on en déduit :

$$\boxed{\mathcal{T}_{(\text{années})} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1 + R_2}{2\,R_1}\right)^{3/2}} = \textbf{0,71 années ou 260 jours}.$$

AN 1

3) *a*) La vitesse V_1 de la terre sur son orbite circulaire de rayon R_1 est telle que

1,5

$$\frac{GMm}{(R_1)^2} = \frac{mV_1^2}{R_1}, \quad \text{donc} \quad \boxed{V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}}. \tag{3}$$

L'accroissement de vitesse à communiquer au vaisseau lors du lancement est, d'après (2) et (3),

1

$$\boxed{v_1 - V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_1}}\left[\sqrt{\frac{2\,R_2}{R_1 + R_2}} - 1\right]} = \textbf{2,99 km/s}.$$

AN 1

b) De même, la vitesse V_2 de Mars sur son orbite circulaire de rayon R_2 est :

1

$$V_2 = \sqrt{\frac{GM}{R_2}} \tag{4}$$

et la vitesse v_2 à l'apogée A sur l'orbite d'Hohmann est donnée par la loi des aires : $C = R_1\,v_1 = R_2\,v_2$ soit, d'après (2),

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\,GM}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

(on peut retrouver ce résultat à partir de l'expression de l'énergie, comme

P5

L'accroissement de vitesse à communiquer au satellite en A pour passer de l'orbite elliptique à l'orbite circulaire de rayon R_2 est donc

1

$$\boxed{V_2 - v_2 = \sqrt{\frac{GM}{R_2}}\left[1 - \sqrt{\frac{2\,R_1}{R_1 + R_2}}\right]} = \textbf{2,68 km/s}.$$

AN 1

4) L'augmentation de l'énergie mécanique totale au cours de ce voyage est

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{GMm}{R_2}\right) - \left(\frac{1}{2}mV_1^2 - \frac{GMm}{R_1}\right)$$

soit, d'après (3) et (4),

2

$$\boxed{\Delta E = GMm\,\frac{R_2 - R_1}{2\,R_1\,R_2}} = \textbf{1,55.10}^{11}\ \textbf{J}.$$

AN 1

5) Pendant la durée $\mathcal{T}$ de ce transfert, la planète Mars M tourne autour du soleil S d'un angle

$$\theta = 2\,\pi \cdot \frac{\mathcal{T}}{T_{\text{Mars}}}$$

où la période T_{Mars} de la planète Mars est donnée par la loi de Kepler :

$$\left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{Mars}} = \left(\frac{T^2}{a^3}\right)_{\text{vaisseau}} \quad \text{soit} \quad \frac{T_{\text{Mars}}^2}{(R_2)^3} = \frac{(2\,\mathcal{T})^2}{\left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)^3}$$

donc

$$\frac{\mathcal{T}}{T_{\text{Mars}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1 + R_2}{2\,R_2}\right)^{3/2}$$

on en déduit $\theta = \pi \cdot \left(\frac{R_1 + R_2}{2\,R_2}\right)^{3/2}$.

La position relative Terre-Mars au moment du lancement est donc telle que $\widehat{TSM} = \pi - \theta$, soit

4

$$\boxed{\widehat{TSM} = \pi\left[1 - \left(\frac{R_1 + R_2}{2\,R_2}\right)^{3/2}\right]}.$$

P6

Application numérique : $\widehat{TSM} = \pi/4 = \textbf{45 degrés}$.

(40,5 pts)

24/3/2003

Poissons dans un aquarium : corrigé

Devoir de Portrapage

I. Loi de Descartes : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3$

$\Rightarrow n_1 \sin i_1 = n_3 \sin i_3 \Rightarrow \boxed{i_3 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_3} \sin i_1\right)}$ (2pts) AN : $i_3 \simeq 60°$ (1pt)

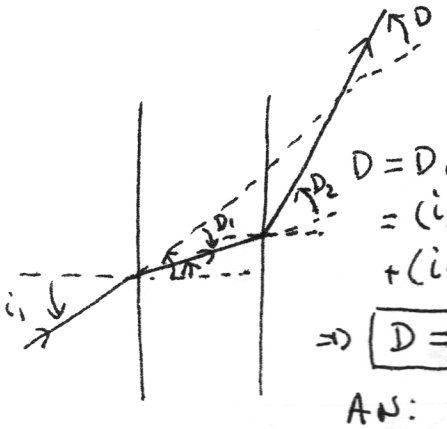
II.

⚠ : il n'y a pas d'angle d'incidence limite d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent (i_2 ne peut être égal à $\pi/2$!)

La limite c'est quand : $i_3 = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow n_1 \sin i_{1\ell} = n_3 \sin \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \boxed{i_{1\ell} = \arcsin\left(\frac{n_3}{n_1}\right)}$ (1) $\overset{AN}{\Rightarrow}$ $i_{1\ell} \simeq 49°$ (1) ; $\boxed{i_{2\ell} = \arcsin\left(\frac{n_3}{n_2}\right)}$ (1) $\overset{AN}{\Rightarrow}$ $i_{2\ell} \simeq 42°$ (1)

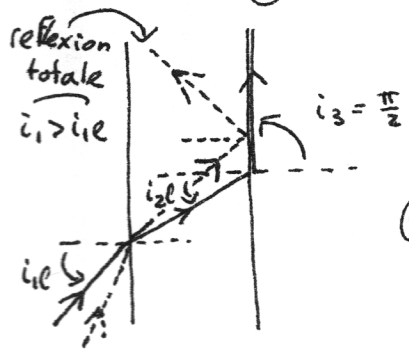
III



$D = D_1 + D_2$
$= (i_2 - i_1)$
$+ (i_3 - i_2)$

$\Rightarrow \boxed{D = i_3 - i_1}$ (1,5)

AN : $D \simeq 20°$ (1)



(1,5)

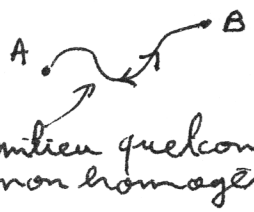
IV

$i_3 = \frac{\beta}{2}$; $i_1 = \frac{\beta'}{2}$ $\Rightarrow n_1 \sin\frac{\beta'}{2} = n_3 \sin\frac{\beta}{2}$

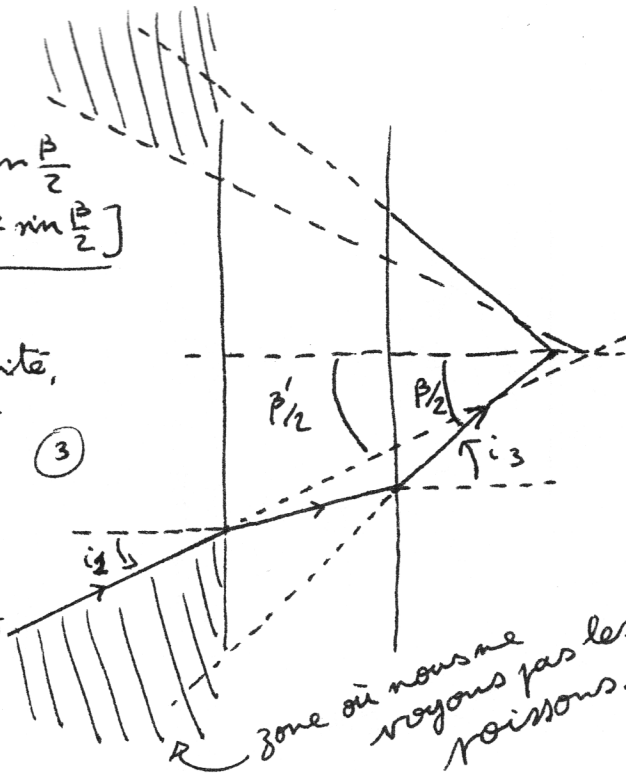
$\Rightarrow \boxed{\beta' = 2 \arcsin\left[\frac{n_3}{n_1} \sin\frac{\beta}{2}\right]}$

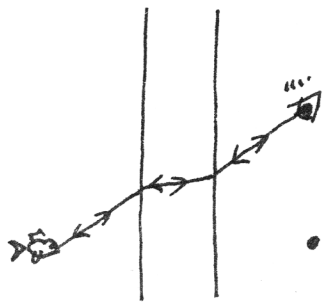
AN : $\beta' = 64°$ (2)

Le champ de vision est réduit.
En laissant de côté le champ et la luminosité, nous devons en premier lieu considérer le principe de retour inverse de la lumière ! (3)



$\Rightarrow$ si nous voyons les poissons, ils nous voient ! A condition qu'ils nous tournent pas le dos ... pb de champ visuel.





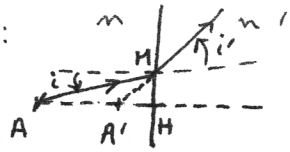
champ visuel maximum des poissons : $\beta_{max} = 2 i_{1\ell}$

$\Rightarrow \beta_{max} = 97°$, eux, contrairement à nous, sont limités par la réflexion totale.

• $\frac{1 - \cos \beta/2}{1 - \cos \beta'/2} = 0{,}52$; le champ de vision est réduit par 2 quasiment !

(2)

V - Relation de conjugaison :



⚠ que des tangentes ! $\sin i = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}}$ n'a aucun sens ! que des grandeurs algébriques selon l'a.o. ou ⊥ à l'a.o.

$n \sin i = n' \sin i'$

$\Rightarrow n i \simeq n' i'$

$\tan i = \frac{\overline{HM}}{\overline{AH}} \simeq i$; $\tan i' = \frac{\overline{HM}}{\overline{A'H}} \simeq i'$

$\Rightarrow n \cdot \frac{\overline{HM}}{\overline{AH}} = n' \frac{\overline{HM}}{\overline{A'H}} \Rightarrow \boxed{n \overrightarrow{A'H} = n' \overrightarrow{AH}}$ (2)

VI

α) $n_2 \overline{AH_1} = n_1 \overline{A'H_1}$ (1) $n_3 \overline{A'H_2} = n_2 \overline{A''H_2}$ (1)

β) $n_2 d = n_1(\overline{A'H_2} + \overline{H_2H_1}) = n_1\left(\frac{n_2}{n_3}\overline{A''H_2} - e\right) = n_1\left(\frac{n_2}{n_3}(\overline{A''A} + \overline{AH_1} + \overline{H_1H_2}) - e\right)$

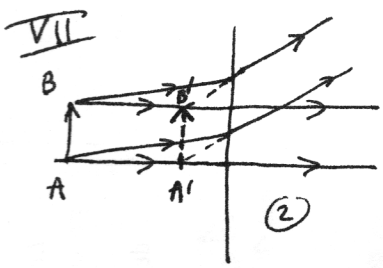
$\Rightarrow \frac{n_2}{n_1} d = \frac{n_2}{n_3}(-\overline{AA''} + d + e) - e \Rightarrow \left(e + \frac{n_2}{n_1} d\right)\frac{n_3}{n_2} = -\overline{AA''} + d + e$

(2,5) $\Rightarrow \boxed{\overline{AA''} = d\left(1 - \frac{n_3}{n_1}\right) + e\left(1 - \frac{n_3}{n_2}\right)}$

γ) (1) $d = 0$ $\Rightarrow \overline{AA''} = \frac{e}{3} = 1\,cm$

(1) $d = 1\,m$ $\Rightarrow \overline{AA''} = \frac{d}{4} + \frac{e}{3} = 26\,cm$

VII



(2)

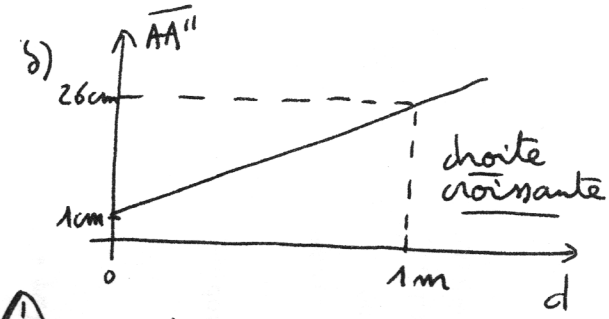
$\overline{A'B'} = \overline{AB}$

$\Rightarrow \gamma = 1$ (1)

pas de grandissement !

image virtuelle

δ)

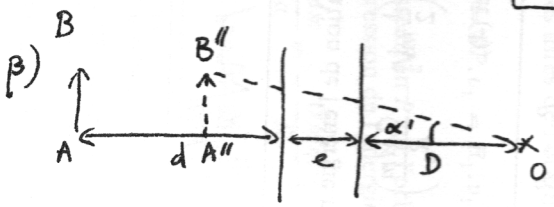


⚠ d > 0 ! Les poissons sont dans l'aquarium !!

VIII

α) $\tan \alpha = \frac{\overline{BA}}{d+e+D}$ (1) $\Rightarrow \boxed{\alpha \simeq \frac{\overline{BA}}{d+e+D}}$

β)



$\gamma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 = 1$

(2) $\boxed{\alpha' \simeq \frac{\overline{B''A''}}{d+e+D-\overline{AA''}}}$

γ) $G = \frac{d+e+D}{d+e+D-\overline{AA''}} = \frac{d+e+D}{d+e+D - d\left(1-\frac{n_3}{n_1}\right) - e\left(1-\frac{n_3}{n_2}\right)}$

$$\boxed{G = \frac{d+e+D}{\frac{n_3}{n_1}d + \frac{n_3}{n_2}e + D}}$$ (3)

AN : $d = 0\,m$ $G = \frac{33}{33-1}$ $G = 1{,}03$ (1)

$d = 1\,m$ $G = \frac{133}{133-26}$ $G = 1{,}24$ (1)

δ) $\frac{dG}{dd} = \frac{1\left(\frac{n_3}{n_2}e + \frac{n_3}{n_1}d + D\right) - \frac{n_3}{n_1}(e+d+D)}{\left(\frac{n_3}{n_2}e + \frac{n_3}{n_1}d + D\right)^2}$

$\left(\frac{n_3}{n_2} - \frac{n_3}{n_1}\right)e + D\left(1 - \frac{n_3}{n_1}\right) \neq 0 \Rightarrow f^n$ monotone $\Rightarrow$ (2) $G_{max} = G_{d \to +\infty} = \frac{n_1}{n_3} = \frac{4}{3} = 1{,}33$

(1) ∞ placé à l'∞, Gmax indépendant de D et n_2 (et e)