PCSI

Devoir Surveillé

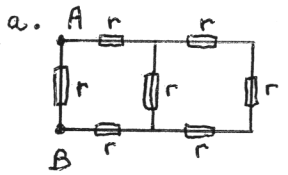
Samedi 2 octobre 2004

durée 2h40

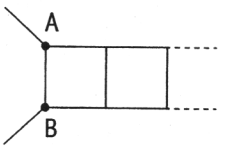
1 Résistances équivalentes

1. Déterminer la résistance équivalente des dipôles A–B représentés ci-dessous.
Chaque branche possède la même résistance *r*.

a.

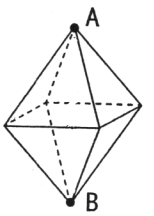


b.



motif infini

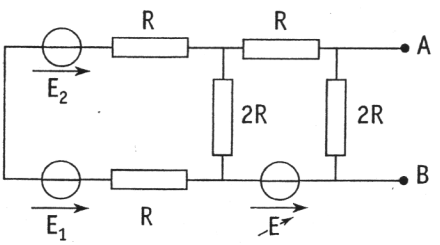
c.



octaèdre régulier

2 Circuit actif réductible à une résistance

On considère le circuit représenté ci-dessous. On prendra :
$R = 5\ \Omega$, $E_1 = 2$ V et $E_2 = 8$ V.



1. Déterminer le générateur de Thévenin équivalent entre les bornes A et B.

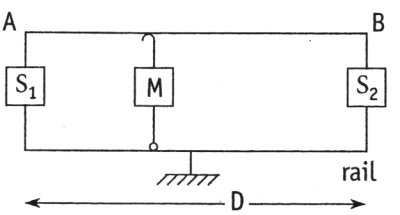
2. a. En déduire la valeur de E pour laquelle le circuit est équivalent (entre A et B) à une résistance pure R_{eq} dont on précisera la valeur.

b. Retrouver ce résultat en faisant une analyse directe de la condition $(V_A - V_B)_{co} = 0$: (**co pour circuit ouvert**) : condition nécessaire pour que le dipôle soit réductible à une résistance (on admettra que cette condition est suffisante).

3 Voie électrifiée

Une locomotive électrique est alimentée en courant continu. L'alimentation est réalisée par des sous-stations S_i distantes de D.

Ces sous-stations relient les rails (au potentiel nul) à la caténaire AB. Chaque source S_i sera représentée par un générateur idéal de tension E (borne ⊕ du côté de la caténaire).



La motrice « M » est branchée entre les rails et la caténaire. On supposera que son moteur doit être alimenté par un courant constant I.

De plus, la caténaire présente une résistance linéïque de valeur ρ et on négligera la résistance des rails et des câbles de liaison à la caténaire.

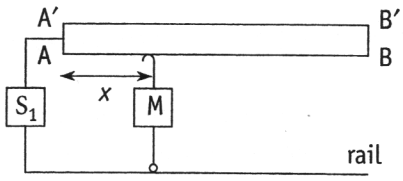
(par exemple une portion de caténaire de longueur ℓ a une résistance ρℓ.)

↳

1. On considère une section de ligne de longueur D alimentée par deux sous-stations (*cf.* figure ci-dessus). On note x la longueur de caténaire séparant la motrice de la sous-station S_1. Exprimer la tension U aux bornes de la motrice, et en déduire la chute de tension $\Delta U = E - U$.

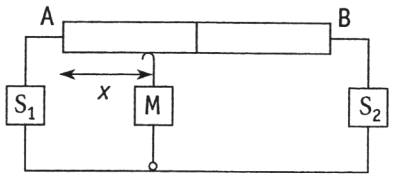
Calculer la valeur maximale D_{max} de D pour $\rho = 5 \cdot 10^{-5}\ \Omega \cdot m^{-1}$; $I = 800$ A et $(\Delta U)_{max} = 45$ V.

2. Une section de même longueur D est – dans cette question – alimentée par une seule station selon le schéma ci-contre. La caténaire est constituée de deux fils identiques AB et A′B′ (longueur D, résistance linéïque ρ) reliés aux extrémités. La motrice est branchée entre les rails et l'un des fils.



Reprendre les questions du **1.**

3. On revient à un système de deux stations, mais avec une caténaire à deux fils court-circuités au milieu de la ligne.



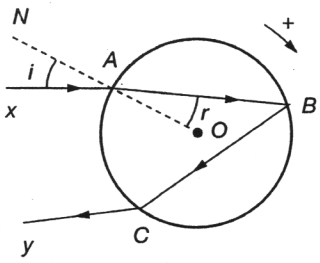
Calculer ΔU et D_{max}.

Que pensez-vous de ces trois systèmes ?

4

Action d'une goutte d'eau

Une goutte d'eau sphérique (centre O), d'indice $n = \frac{4}{3}$, reçoit un rayon incident xA en A, tel que $(Ax, AN) = i$



On considère successivement le rayon réfracté AB, le rayon réfléchi BC puis le rayon transmis Cy. On pose : $(AB, AO) = r$.

a) Exprimer la déviation $D = (xA, Cy)$ en fonction de i et r.

Calculer i_m et D_m au minium de déviation.

b) La goutte est éclairée par des rayons polychromatiques, sous l'incidence $i = i_m$ (au minimum de déviation). Exprimer la variation ΔD_m, pour une variation Δn de l'indice, en fonction de r_m, n, Δn.

Application numérique : $\Delta n = 10^{-2}$.

5

Fibre optique

Une fibre optique est constituée par un cylindre transparent, le cœur, d'axe Δ, de rayon $r = 0{,}1\,\text{mm}$ et d'indice $n_1 = 1{,}51$, entouré par un manchon transparent, la gaine, d'indice $n_2 = 1{,}49$. Pour simplifier, on ne considérera dans ce problème que des rayons situés dans un plan contenant Δ.

1) Quel est l'angle maximal α_{max} que fait un rayon à l'intérieur de la fibre optique avec Δ pour qu'il soit totalement réfléchi par l'interface cœur gaine et ne puisse sortir du cœur ?

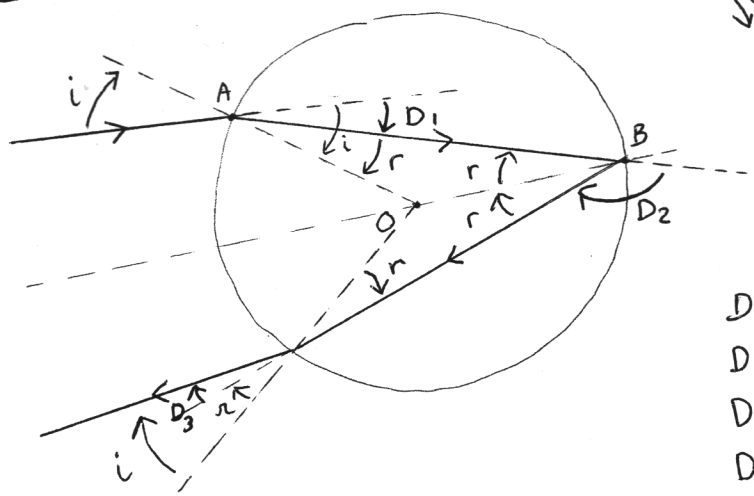
2) On courbe la fibre optique, l'axe Δ devenant un cercle de rayon R. Dans quel intervalle peut se trouver R pour que tous les rayons lumineux initialement parallèles à la tangente à l'axe soient totalement réfléchis à l'interface cœur gaine et ne puissent sortir du cœur ?

énoncé : TEC & DOC

(4) (16pts)

Action d'une goutte d'eau (→ Arc en ciel)

a)



(rmq : le rayon incident du schéma de l'énoncé est mal tracé, i trop petit, chemin-nement non symétrique par rapport à la droite (OB))

AOB triangle isocèle.

$D = D_1 + D_2 + D_3$

$D_1 = i - r$

$D_2 = \pi - 2r$

$D_3 = i - r$

$\Rightarrow_{(1)} \boxed{D = \pi + 2i - 4r}$ (★★)

3pts

Détermination de i_m : ★★★★

Il fallait déterminer la fonction $D(i)$, et déterminer quand $\left(\frac{dD}{di}\right)_{i=i_m} = 0$, mais : $D(i) = \pi + 2i - 4\arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right)$, et la dérivée est compliquée ..... il y a plus simple (idem prisme).

(2) $\sin i = n \sin r$

$$\begin{cases} \frac{dD}{di} = 2 - 4\frac{dr}{di} & \left(\frac{d(1)}{di}\right) \\ \cos i = n\cos r \frac{dr}{di} & \left(\frac{d(2)}{di}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{dr}{di} = \frac{1}{n}\frac{\cos i}{\cos r} \Rightarrow \frac{dD}{di} = 2 - \frac{4}{n}\frac{\cos i}{\cos r} \Rightarrow \left(\frac{dD}{di}\right)_{i=i_m} = 2\left[1 - \frac{2\cos i_m}{n\cos r_m}\right] = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\cos i_m = n\cos r_m & (a) \\ \sin i_m = n \sin r_m & (b) \end{cases}$$

$(a)^2 + (b)^2 \Rightarrow 4\cos^2 i_m + \sin^2 i_m = n^2$

$\Rightarrow 3\cos^2 i_m = n^2 - 1$

$\Rightarrow \boxed{\cos i_m = \sqrt{\frac{n^2-1}{3}}}$

6pts

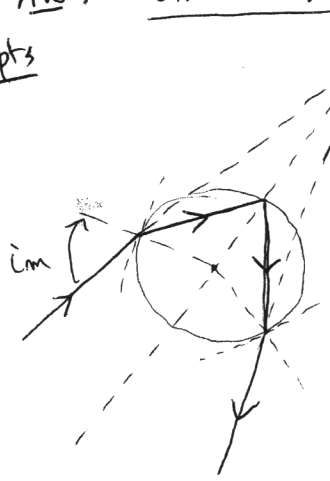
AN : $i_m = 59{,}4° = 59°23'$

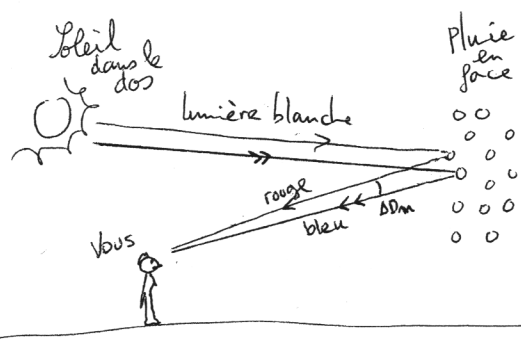
3pts

$\sin r_m = \frac{1}{n}\sin i_m$

$r_m = 40{,}2° = 40°12'$ $\Rightarrow$ $D_m = 138°$

accumulation de lumière en D_m.





$n \nearrow, \lambda \searrow, D_m \nearrow$

★★★ b) $i = i_m = cste$

$\frac{dD}{dn} = -4\frac{dr}{dn}$

$\frac{d}{dn}(2) \Rightarrow 0 = \sin r + n\cos r \frac{dr}{dn}$

$\Rightarrow \frac{dr}{dn} = -\frac{1}{n}\tan r$

$\Rightarrow \frac{dD}{dn} = \frac{4}{n}\tan r$

3pts $\Rightarrow \boxed{\Delta D_m = \frac{4}{n}\tan r_m \Delta n}$

1pts AN : $\Delta D_m = 1°27'$