

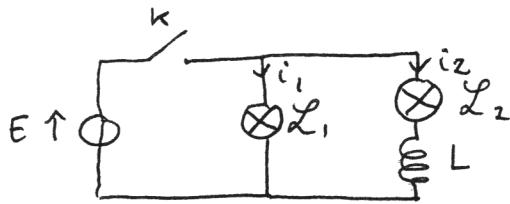
Devoir Surveillé
de
Physique -

le 4 nov. 2005

Exercice 1: Soit le circuit suivant :

Les deux lampes L_1 et L_2 sont équivalentes à des résistances R .

A $t=0$ nous Fermons K.

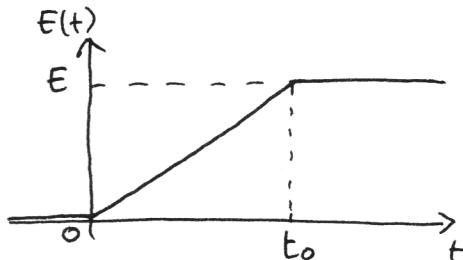
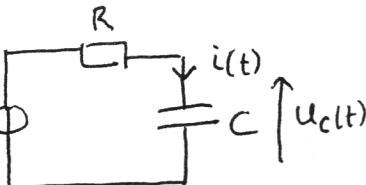


Données : $E = 3V$; $L = 10H$; $R = 5\Omega$.

- 1) Déterminez $i_1(t)$ et $i_2(t)$, quel que soit t , en fonction des données.
Tracer les courbes sur le même graphique.
- 2) Quand nous fermons K, les deux lampes s'allument-elle simultanément ?
- 3) Les lampes, maintenant toutes deux allumées, nous ouvrons K, les voyons-nous s'éteindre en même temps ?
Préciser (tracer $i_2(t)$).

Exercice 2: Soit

le circuit suivant: $E(t) \uparrow$

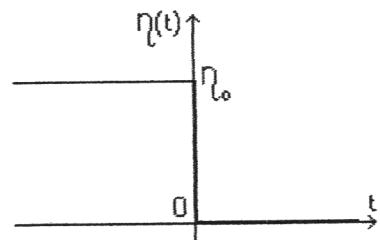
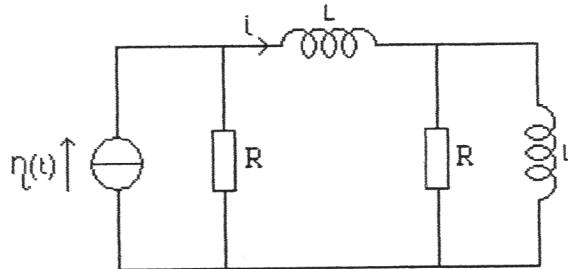


A $t=0$ la tension $E(t)$ ne s'établit pas

instantanément à E , mais évolue tout d'abord linéairement de 0 à E .

- 1) 1) Déterminer les équations différentielles vérifiée par $u_C(t)$ et $i(t)$ pour $0 < t < t_0$.
Résoudre celle pour $i(t)$ et en déduire l'expression générale de $u_C(t)$.
Exprimer $u_C(t)$ et $i(t)$ en fonction des données.
- 2) mêmes questions pour $t > t_0$.
- 3) Calculer le travail reçu par R et C de 0 à t_0 .
- 4) Montrer que si $t_0 \gg T = RC$ alors $u_C(t_0) \approx E$.
- 5) Donner l'expression du rendement de la charge, η , pour $t_0 \gg T$.
Pour quelle valeur de t_0 le rendement est de 99% ?

Exercice Soit le montage suivant :



- 1) En utilisant un circuit équivalent déterminer $i(t)$ pour $t < 0$.
- 2) Montrer que l'équation différentielle vérifiée pour $t > 0$ est :

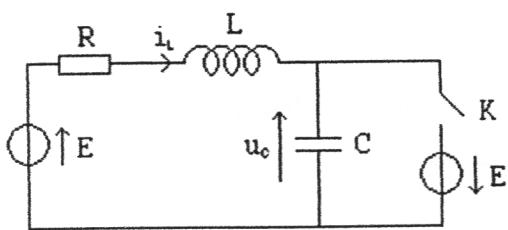
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau^2} i = 0$$

Exprimer τ en fonction des données.

- 3) Quel est le facteur de qualité du montage ?
- 4) Résoudre l'équation différentielle et exprimer $i(t)$ en fonction des données.
- 5) Représenter la courbe $i(t)$.

(16)

Exercice 4 Soit le montage suivant :



K fermé pour $t < 0$.

K ouvert pour $t > 0$.

$$\text{Nous avons : } R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

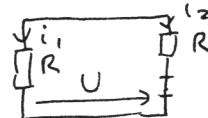
- 1) Déterminer u_C et i_L pour $t < 0$ puis pour t infini.
- 2) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t > 0$.
- 3) Dans quel régime fonctionne le circuit ?
- 4) Résoudre l'équation différentielle.
- 5) Représenter la courbe $u_C(t)$.

4
2
2
5
3

DS
Correction

(12)

Exercice 1: 1) $t < 0$:
 $i_1 = -i_2$



$$U = (2R)i_1 = 0 \Rightarrow$$

$$i_1 = 0 \text{ et } i_2 = 0$$

 $t > 0$:

$$E = R i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{E}{R}$$

$$E = R i_2 + L \frac{di_2}{dt} \Rightarrow \frac{di_2}{dt} + \frac{R}{L} i_2 = \frac{E}{L}$$

on pose: $\tau = L/R$

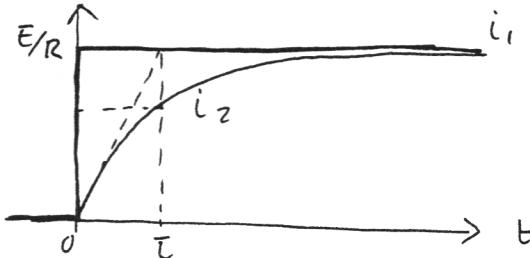
3,

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{\tau} i_2 = \frac{E}{L} ; i_2 = i_{2\text{ssm}} + i_{2\text{part}} \cdots = \alpha e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$$

$i_2(t)$ fond° continue $\Rightarrow i_2(0-) = i_2(0+)$ $\Rightarrow 0 = \alpha + E/R \dots$

1,5 $\Rightarrow i_2(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$

AN: $\tau = 2s$

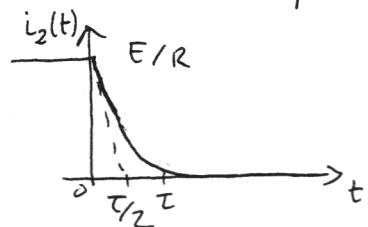
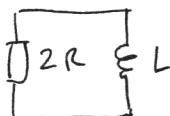


2) non,

2) L_1 s'allume en premier,
juste après la fermeture de K, L_2 quelques secondes après ($\sim \tau$).

3) K ouvert, $i_1 = -i_2$, les deux lampes s'éteignent en même temps.
Mais après combien de temps?

3



$$\tau' = \frac{L}{2R} = \frac{\tau}{2}$$

2 fois plus vite que L_2 s'était allumée ($\sim \tau/2$).

(2)

Exercice 2: 1) $E(t) = R i + u_c = RC \frac{du_c}{dt} + u_c = \frac{E}{t_0} t$

2

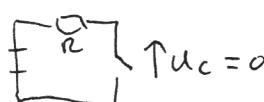
$$\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{RC} u_c = \frac{E}{t_0} \frac{t}{RC} \Rightarrow \boxed{\frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = \frac{Et}{t_0 \tau}} \quad (*) \text{ avec } \tau = RC$$

$0 < t < t_0$

$$i = C \frac{du_c}{dt} \quad C \frac{d(*)}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{CE}{t_0 \tau}}$$

2) $i(t) = \alpha e^{-t/\tau} + \frac{CE}{t_0 \tau} ; u_c(t) = E(t) - R i(t) = E \frac{t}{t_0} - R \alpha e^{-t/\tau} - \frac{CE}{t_0 \tau}$

$\Rightarrow u_c(t) = \frac{E}{t_0} (t - \tau) - R \alpha e^{-t/\tau} ; u_c$ continue $\Rightarrow u_c(0-) = u_c(0+)$

 $t < 0$:

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{E \tau}{R t_0}$$

$$\Rightarrow 0 = -\frac{E \tau}{t_0} - R \alpha$$

$$1) \quad u_c(t) = \frac{E}{t_0}(t-t_0) + \frac{E\tau}{t_0} e^{-t/\tau} \Rightarrow \boxed{u_c(t) = \frac{E}{t_0}(t-t_0 + \tau e^{-t/\tau})} \quad |_{t \in [t_0, t_0]}$$

$$i = c \frac{du_c}{dt} = c \frac{E}{t_0} (1 - \frac{\tau}{t} e^{-t/\tau}) \Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{cE}{t_0} (1 - e^{-t/\tau})}$$

$$2) \quad t \geq t_0 : \quad \frac{du_c}{dt} + \frac{1}{\tau} u_c = \frac{E}{\tau} \quad \dots \quad u_c(t) = \alpha' e^{-t/\tau} + E \quad / \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = 0$$

$$u_c(t_0^-) = u_c(t_0^+) = \frac{E}{t_0} (t_0 - \tau + \tau e^{-t_0/\tau}) = \alpha' e^{-t_0/\tau} + E$$

$$\Rightarrow \frac{E\tau}{t_0} (e^{-t_0/\tau} - 1) = \alpha' e^{-t_0/\tau} \Rightarrow \alpha' = \frac{E\tau}{t_0} (1 - e^{t_0/\tau})$$

$$\Rightarrow \boxed{u_c(t) = \frac{E\tau}{t_0} (1 - e^{t_0/\tau}) e^{-t/\tau} + E} \quad |_{t > t_0} \quad \boxed{i(t) = -\frac{E\tau}{Rt_0} (1 - e^{t_0/\tau}) e^{-t/\tau}} \quad |_{t > t_0}$$

$$3) \quad W_R = \int_0^{t_0} R i^2 dt = \int_0^{t_0} R \frac{C^2 E^2}{t_0^2} (1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau}) dt$$

$$= \frac{RC^2 E^2}{t_0^2} \left[t + 2\tau e^{-t/\tau} - \frac{\tau}{2} e^{-2t/\tau} \right]_0^{t_0}$$

$$W_R = \frac{RC^2 E^2}{t_0^2} \left[t_0 + 2\tau e^{-t_0/\tau} - \frac{\tau}{2} e^{-2t_0/\tau} - \frac{3\tau}{2} \right]$$

$$4) \quad W_C = E_C(t_0) - E_C(0) = \frac{1}{2} C u_c^2(t_0) - 0 = \frac{1}{2} C \frac{E^2}{t_0^2} (t_0 - \tau + \tau e^{-t_0/\tau})^2$$

$$4) \quad t_0 \gg \tau : \quad u_c(t) \approx \frac{E}{t_0} (t - \tau) \text{ car } e^{-t_0/\tau} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow u_c(t_0) \approx \frac{E}{t_0} (t_0 - \tau) \approx \frac{E}{t_0} t_0 \Rightarrow \boxed{u_c(t_0) \approx E}$$

$$5) \quad \eta = \frac{W_C}{-W_G} = \frac{W_C}{W_R + W_C} .$$

$$t_0 \gg \tau \Rightarrow W_C \approx \frac{1}{2} C E^2$$

$$W_R \approx \frac{RC^2 E^2}{t_0^2} \left(t_0 - \frac{3\tau}{2} \right) \approx \frac{RC^2 E^2}{t_0} = C E^2 \frac{\tau}{t_0} \rightarrow 0$$

$$2) \quad \Rightarrow \boxed{\eta = \frac{\frac{1}{2} C E^2}{C E^2 \frac{\tau}{t_0} + \frac{1}{2} C E^2} = \frac{1}{1 + 2\tau/t_0}}$$

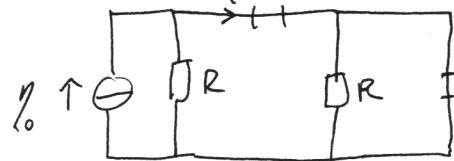
$$\eta = \frac{99}{100} = \frac{1}{1 + 2\tau/t_0} \Rightarrow \frac{100}{99} = 1 + 2 \times 98 \frac{\tau}{t_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_0 = 196\tau}$$

Plus la charge est lente, plus le rendement est proche de 100%.

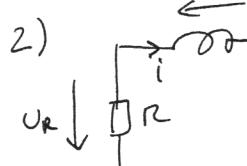
16) CORRECTION DIL 2

Exercice 1) $t \leq 0$:



R court circuées

$$\Rightarrow i = \gamma_0$$



$$(S) \Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = -L \frac{di'}{dt}$$

$$\Rightarrow L \frac{di'}{dt} = -\frac{di}{dt} - \frac{R}{L} i$$

$$U_L' = L \frac{di'}{dt} \quad (1)$$

$$U_L' = R(i - i') \quad (2)$$

$$U_L = L \frac{di}{dt} \quad (3)$$

$$U_R = Ri \quad (4)$$

$$U_L + U_R = -U_L' \quad (5)$$

$$\frac{L di}{dt} + Ri = -R(i - i')$$

$$\frac{d}{dt} \left[L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} \right] = -R \frac{di}{dt} + R \frac{di'}{dt}$$

$$\Rightarrow L \frac{d^2 i'}{dt^2} = \frac{L}{R} \frac{d^2 i}{dt^2} + 2 \cdot \frac{R}{L} \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow -\frac{di}{dt} - \frac{R}{L} i = \frac{L}{R} \frac{d^2 i}{dt^2} + 2 \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{3R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{R^2}{L^2} i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{3}{\tau} \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau^2} i = 0 \quad \text{avec } \boxed{\tau = L/R}$$

$$3) \frac{1}{\tau^2} = \frac{3}{\tau} ; \omega_0^2 = \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow \boxed{\Omega = \omega_0 \tau = \sqrt{3}} < \frac{1}{2} \Rightarrow \text{régime aperiodique}$$

$$4) i(t) = \alpha_1 e^{d_1 t} + \alpha_2 e^{d_2 t}, \quad d^2 + \frac{3}{\tau} d + \frac{1}{\tau^2} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{\sqrt{5}}{\tau} \Rightarrow d_{1,2} = -\frac{3/\tau \pm \sqrt{5}/\tau}{2} \Rightarrow d_{1,2} = -\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2\tau}$$

$$i(t) \text{ fonction continue} \Rightarrow i(0-) = i(0+) \Rightarrow \gamma_0 = \alpha_1 + \alpha_2$$

deuxième fonction continue $\Rightarrow i'$; i continue $\Rightarrow U_R$ continue

et $R(i - i')$ continue $\Rightarrow U_L (= L \frac{di}{dt})$ continue.

$$\frac{di}{dt} = \alpha_1 d_1 e^{d_1 t} + \alpha_2 d_2 e^{d_2 t}; \quad \left(\frac{di}{dt}\right)_{0-} = \left(\frac{di}{dt}\right)_{0+} = \frac{U_L 0-}{L} = 0$$

$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 = 0$$

$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 (\gamma_0 - \alpha_1) = 0 \Rightarrow \alpha_2 \gamma_0 = \alpha_1 (d_2 - d_1) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{d_2 \gamma_0}{\sqrt{5}/\tau} \\ \alpha_2 = \frac{d_1 \gamma_0}{\sqrt{5}/\tau} \end{cases}$$

$$5) i(t) = \frac{\gamma_0}{\sqrt{5}} \left[\frac{-3+\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2\tau} t} - \frac{-3-\sqrt{5}}{2} e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2\tau} t} \right]$$

