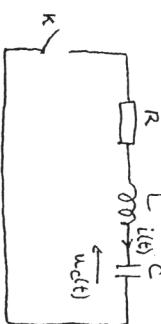


- 5) A partir des conditions initiales établir un système de 2 équations pour α_1 et α_2 . Donnez l'expression de α_1 et α_2 en fonction de U_0 .

2 h

[A]

Soit le montage suivant :



Nous avons pour l'inductance : $L = R^2 C$

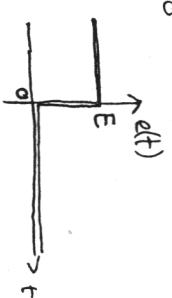
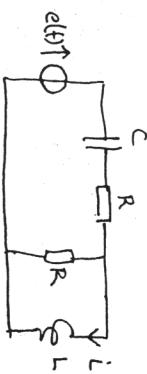
1) Montrez que l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t \geq 0$ s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{\tau_E} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad (E)$$

où les constantes τ_E et ω_0 sont nommées et explicitées en fonction de R , L et C .

[B]

Soit le circuit suivant :



1) Que vaut i pour $t < 0$.

- 2) Déterminez l'équation différentielle déterminée par $i(t)$ pour $t \geq 0$.

- 3) Déterminez l'expression du facteur de qualité Q en fonction de R .

Pour quelle(s) valeur(s) de R le circuit est-il en régime critique ?

- 4) Donner la solution générale pour $u_C(t)$ en fonction de λ_1 et λ_2 , et de deux constantes K_1 et K_2 ($t \geq 0$).

- 6) En déduire l'expression de $u_C(t)$ en fonction de U_0 et τ_E (Expression réelle) pour $t \geq 0$. Quelle est l'expression de la pseudopolarisation ?

- 7) En déduire $i(t)$ pour $t \geq 0$. Obtenez-vous pour $i(0+)$ la valeur attendue ?

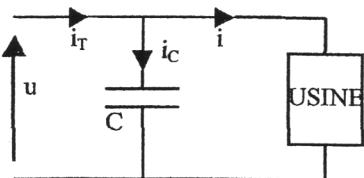
- 8) Tracer la courbe $i(t)$.

$t < 0$: K ouvert, condensateur chargé sous la tension U_0 .

$t \geq 0$: K fermé.

C

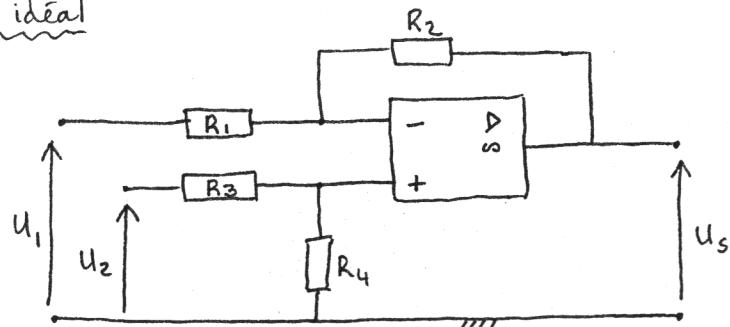
Circuits en courant sinusoïdal



- 1) Une usine, alimentée sous la tension sinusoïdale u de valeur efficace $U = 220$ volts et de fréquence $f = 50$ hertz, consomme une puissance moyenne $P = 22$ kW ; son facteur de puissance est $\cos \phi = 0,5$. Calculer l'intensité efficace i .
- 2) L'usine a un caractère inductif à cause de ses machines. Représenter qualitativement dans le plan complexe les amplitudes complexes de u et de i en prenant comme référence de phase u .
- 3) On met en parallèle avec l'usine un condensateur de capacité C de sorte que le facteur de puissance de l'ensemble soit maximal. Comment est alors l'amplitude complexe du courant i_T par rapport à celle de u ?
- 4) Compléter la figure de la question 2) en y représentant les amplitudes complexes de i_C et i_T de façon conforme à la question précédente.
- 5) Calculer numériquement la valeur I_C efficace de i_C , puis la valeur que doit avoir la capacité C .
- 6) Comment l'énergie perdue par effet Joule dans les lignes qui amènent le courant dépend-elle de la valeur efficace i_T de i_T ?
- 7) Calculer en pourcentage l'économie réalisée par le fournisseur de l'énergie électrique, l'industriel consommant toujours la même puissance.

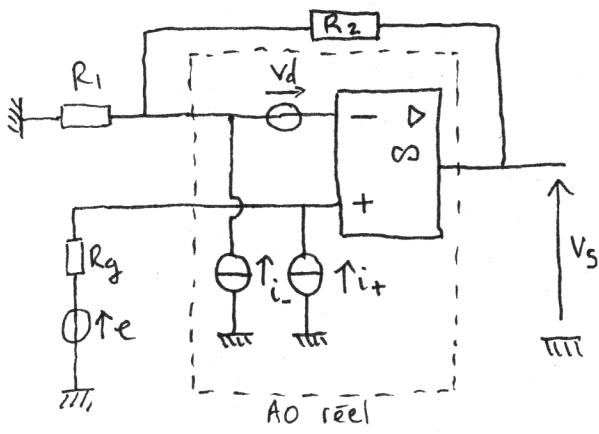
$$\sqrt{3}/2 \approx 9/10 \quad \pi \approx 3 \quad \text{Valeurs numériques estimées}$$

D AO idéal



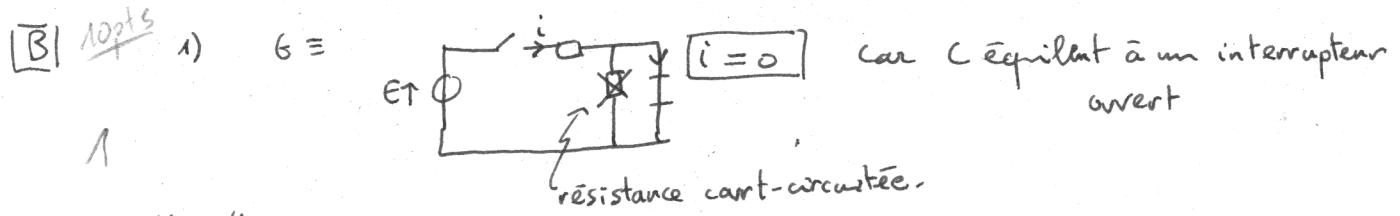
- 1) Appliquez la loi des noeuds en terme de potentiel en E_- .
- 2) même chose en E_+ .
- 3) Expression de U_s en fonction de U_1 et U_2 .
- 4) Fonction du montage.

E AO non idéal: On a modélisé une partie des défauts de l'AO par deux sources de courants pour les courants d'entrée des bornes + et - et par un générateur de tension pour la tension de décalage entre ces mêmes bornes.



- 1) De quel montage s'agit-il ?
- 2) Calculer V_g en fonction des données.
- 3) Déterminer l'erreur relative commise sur V_g par rapport à un AO idéal.

Données: $R_g = 50 \Omega$ $R_2 = 9 \cdot 10^4 \Omega$
 $i_+ = i_- = 40 \text{ nA}$ $R_1 = 10^4 \Omega$
 $V_d = 40 \text{ mV}$ $e = 0,4 \text{ V}$



2)

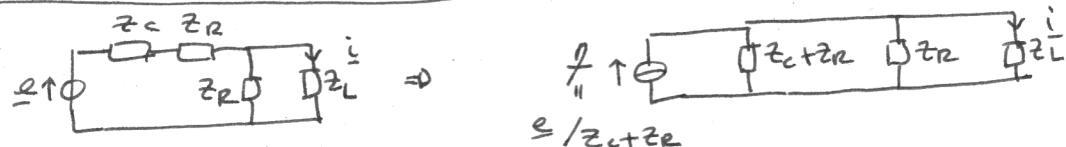
$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_{RL} \\ u_{RL} + u_{RC} + u_C = 0 \\ i_C = C \frac{du_C}{dt} \\ u_{RC} = R i_C \\ u_{RL} = R(i_C - i) \\ u = L \frac{di}{dt} \end{array} \right. \rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R(i_C - i) + R i_C + u_C = 0 \\ \Rightarrow 2R \frac{di}{dt} - R \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} = 0 \\ \Rightarrow 2R \frac{di}{dt} - R \frac{di}{dt} + \frac{i_C}{C} = 0 \\ \text{or } u = L \frac{di}{dt} = u_{RL} = R(i_C - i) \\ \Rightarrow L \frac{di}{dt} + R i = R i_C \\ \Rightarrow i_C = \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i \end{array} \right.$$

d'où: $2R \left(\frac{L}{R} \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{di}{dt} \right) - R \frac{di}{dt} + \frac{L}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$
 $\Rightarrow 2R \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(R + \frac{L}{RC} \right) \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$

4) $\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{R}{2L} + \frac{1}{2RC} \right) \frac{di}{dt} + \frac{1}{2LC} i = 0}$

Autre méthode:



\Rightarrow diviseur de courant : $i = \frac{U}{Z_C + Z_R} \frac{1/Z_L}{1/Z_L + 1/Z_R + 1/(Z_C + Z_R)}$

 $= \frac{U}{\frac{1}{j\omega C} + R} \frac{1/j\omega L}{1/j\omega L + 1/R + 1/(j\omega C + R)}$
 $= \frac{U j\omega C}{1 + jR\omega C} \frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega + \frac{(j\omega L)(j\omega C)}{1 + jR\omega C}}$
 $\Rightarrow i = \frac{U}{1 + jR\omega C + j\frac{L}{R}\omega + (j\omega)^2 LC + (j\omega)^2 LC}$

$\Rightarrow ((j\omega)^2 2LC + (j\omega)(R_C + \frac{L}{R}) + 1) i = (j\omega) C U = 0$ si $\omega \neq 0$; $U = 0$

$\stackrel{\text{équation diff}}{=} 2LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \left(\frac{d}{dt} i(t) \right) \left(R_C + \frac{L}{R} \right) + i(t) = 0$ CQFD ! Yoppi!

3) $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{2k} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \Rightarrow T_E = \frac{2}{\frac{R}{L} + \frac{1}{R_C k}} = \frac{2}{\frac{R}{L} + \frac{R}{L} k} = \frac{L}{R} \frac{2}{k+1}$

$w_0^2 = \frac{1}{2LC} = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} \right)^2 k \Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{k}{2}} \frac{R}{L} \quad \text{or} \quad Q = w_0 T_E$

3) d'où: $Q = \sqrt{\frac{k}{2}} \frac{2}{k+1} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\sqrt{2k}}{k+1}}$

4) $Q = \frac{1}{2} \Rightarrow Q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2k}{(k+1)^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow 8k = k^2 + 2k + 1 \Rightarrow k^2 - 6k + 1 = 0$

2) $\boxed{k = 3 \pm 2\sqrt{2}}$

remarque: Q_{\max} pour $k = 1$; $Q_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 en effet: $\frac{dQ^2}{dk} = \frac{2(1-k)}{(1+k)^3}$ $\frac{k \xrightarrow{0} 1}{Q \xrightarrow{0} \frac{1}{\sqrt{2}}} \xrightarrow{+ \infty} 0$

8) Tracer la courbe $i(t)$:
enveloppe exponentielles: $y_t(t) = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{RCU_0}{L} e^{-t/2\tau_e}$

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{2}}{2\tau_e}$$

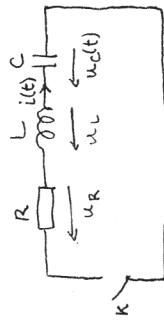
$$\Rightarrow T = \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \tau_e$$

$$\Rightarrow T \approx 3(2\pi\tau_e)$$



(45)

A) Soit le montage suivant :



$t < 0$: K ouvert,
Condensateur chargé
sous la tension U_0 .

$t \geq 0$: K fermé.

$$L = R^2 C$$

Nous avons pour l'inductance :

1) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t \geq 0$ s'écrit sous la forme :

$$6 \quad \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{\tau_e} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad (\text{E})$$

où les constantes τ_e et ω_0 seront minimées et explicitées
en fonction de R, L et C .

Loi des mailles : $\begin{cases} u_R + u_L + u_C = 0 \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases} \Rightarrow R \left(C \frac{du_C}{dt} \right) + L \frac{di}{dt} + u_C = 0$

$$u_R = R i ; \quad u_L = L \frac{di}{dt}$$

$$\times \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{\tau_e} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_e = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

4) τ_e : temps de relaxation en énergie.

ω_0 : pulsation propre.

- 2) Quelles sont, dans démonstrations, les expressions générales des solutions pour (E)? (les différents régimes seront nommés).
Nous avons: $Q = \omega_0 \tau_e$ (facteur de qualité)

$Q > \frac{1}{2}$:

5

$$u_C(t) = u_0 e^{-t/\tau_e} \cos(\Omega_0 t + \varphi) \quad [\text{régime pseudopériodique}]$$

Ω : pseudopériode
(dépend de R, L et C)

$Q = \frac{1}{2}$:

$$u_C(t) = (\alpha + \beta t) e^{-t/\tau_e} \cos(\varphi) \quad (\alpha, \beta) \rightarrow C \text{ I} \quad [\text{rég. critique}]$$

$$Q < \frac{1}{2}:$$

$$u_C(t) = e^{-t/\tau_e} (A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}) \quad (A, B) \rightarrow C \text{ II} \quad [\text{rég. périodique}]$$

A dépend de R, L et C .

3) Établir l'équation caractéristique de (E).

Nous sommes ici dans quel régime ?

Que vaut le facteur de qualité Q du circuit ?

Nous appelons α_1 et α_2 les deux racines de l'équa. car...

Explicitons-les en fonction de T_C .

Solutions sous la forme : $u_C(t) = \alpha e^{\alpha t}$

dans (E) \Rightarrow

$$\boxed{d^2 + \frac{1}{T_C} d + \omega_0^2 = 0}$$

Discriminant : $\Delta = \frac{1}{T_C^2} - 4\omega_0^2 \Rightarrow \Delta = \frac{1}{T_C^2}(1-4Q^2)$

$$Q = \omega_0 T_C = \frac{1}{\sqrt{LC}} \frac{L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} ; \text{ i.e. } L = R^2 C \Rightarrow \boxed{Q = 1}$$

$$\text{et } \Delta = -\frac{3}{T_C^2}$$

$$\Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{-\frac{1}{T_C} \pm j\frac{\sqrt{3}}{T_C}}{2}$$

$Q > \frac{1}{2} \Rightarrow$ régime pseudopériodique

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{-1 + j\sqrt{3}}{2T_C} \\ \text{et } \alpha_2 &= \frac{-1 - j\sqrt{3}}{2T_C} \end{aligned}}$$

4) Donner la solution générale pour $u_C(t)$ en fonction de α_1 et α_2 , et de deux constantes α_1 et α_2 ($t \geq 0$).

$$\boxed{u_C(t) = \alpha_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 e^{\alpha_2 t} \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2}$$

5) A partir des conditions initiales établir un système de 2 équations pour α_1 et α_2 . Donnez l'expression de α_1 et α_2 en fonction de U_0 .

Le courant $i(t)$ traversant la bobine est une fonction continue, de même pour la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur :

$$\begin{cases} i(0^-) = i(0^+) \\ u_C(0^-) = U_0 \end{cases}$$

$$\text{et : } i(\sigma^-) = 0 \quad (\kappa \text{ ouvert})$$

$$u_C(\sigma^-) = U_0$$

Calcul de $i(t)$:

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow i(t) = C (\alpha_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 e^{\alpha_2 t})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 \\ U_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2 (\alpha_1 - \alpha_2) \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_1) \end{cases}$$

$$\text{or : } \alpha_1 - \alpha_2 = j \frac{\sqrt{3}}{T_C} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{j \frac{\sqrt{3}}{T_C} + U_0}{j \frac{\sqrt{3}}{T_C}}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{j \frac{\sqrt{3}}{T_C} - U_0}{j \frac{\sqrt{3}}{T_C}}$$

$$\boxed{\begin{cases} \alpha_1 = U_0 \left(+ \frac{1}{2} - j \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \\ \alpha_2 = U_0 \left(+ \frac{1}{2} + j \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = U_0 \left(- \frac{1}{2} - j \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \\ \alpha_2 = U_0 \left(- \frac{1}{2} + j \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \end{cases}}$$

6) En déduire l'expression de $u_C(t)$ en fonction de U_0 et T_C (Expression réelle) pour $t \geq 0$. Quelle est l'expression de la pseudopériodicité ?

$$\begin{aligned} u_C(t) &= U_0 \left\{ \left(\frac{1}{2} - j \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) e^{j\frac{\sqrt{3}}{2T_C}t} + \left(\frac{1}{2} + j \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2T_C}t} \right\} e^{-\frac{t}{T_C}} \\ &\Rightarrow u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{T_C}} \left\{ \frac{e^{j\frac{\sqrt{3}}{2T_C}t} + e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2T_C}t}}{2} - \frac{j}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\sqrt{3}}{2T_C}t} - e^{-j\frac{\sqrt{3}}{2T_C}t} \right\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_C(t) &= U_0 e^{-\frac{t}{T_C}} \left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{t}{T_C}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{t}{T_C}\right) \right) \\ &\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{\sqrt{3}}{2T_C}} \end{aligned}}$$

7) En déduire $i(t)$ pour $t \geq 0$. Obtenez-vous pour $i(t)$ la valeur attendue ?

$$\begin{aligned} i(t) &= C U_0 e^{t/2T_C} \left\{ -\frac{1}{2T_C} \cos \Omega t - \frac{1}{2\sqrt{3}T_C} \sin \Omega t \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{3}}{2T_C} \sin \Omega t + \frac{1}{2\sqrt{3}T_C} \cos \Omega t \right\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{i(t) = -\frac{RCU_0}{2L} e^{-t/2T_C} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \sin \Omega t \right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{i(t)}{U_0} = -\frac{RCU_0}{2L} e^{-t/2T_C} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \sin \Omega t \right)}$$

$$\boxed{C} \quad 1) P = UI \cos \phi ; \quad I = \frac{P}{U \cos \phi} \quad \text{AN} \quad I = \frac{22 \cdot 10^3}{220 \cdot \sqrt{2}} = 200A$$

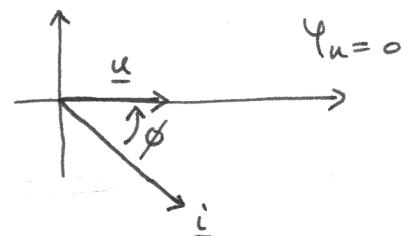
$$2) \underline{u} = Z_{\text{usine}} \underline{i}$$

$$\Rightarrow \varphi_{u,i} = \arg(z) ; \quad z = R + jL\omega \Rightarrow 0 < \arg z < +\pi/2$$

$$\Rightarrow u \text{ en avance sur } i : \quad \phi = 60^\circ$$

$$3) \cos \phi' = 1 ; \quad \phi' = 0^\circ$$

$\phi' = \arg z' = \varphi_{u,i_T} = 0$, le courant et la tension sont alors en phase



4) En parallèle les courants s'ajoutent: $i_T = i_C + i$. Pour un condensateur $i_C(t)$ et $u(t)$ sont en quadrature: i_C et u perpendiculaires.

$$5) * \sin \phi = \frac{I_C}{I} \Rightarrow I_C = I \sin \phi$$

$$\Rightarrow \text{AN} \quad I_C = 200 \sin 60^\circ \approx 200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 180A$$

$$\underline{I_C \approx 180A}$$

$$* \underline{u} = Z_C \underline{i_C} \Rightarrow U_m = |Z_C| |i_C|_m$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{c\omega} I_C \Rightarrow C = \frac{I_C}{2\pi f U} \quad \text{AN: } C \approx \frac{180}{2 \times 3 \times 50 \times 220}$$

$$\approx \frac{60}{22 \cdot 10^3} \approx 3 \cdot 10^{-3}$$

6) r_ℓ : résistance de ligne

$$\Rightarrow P_\ell = r_\ell I_T^2 \text{ au carré.}$$

$$\Rightarrow C \approx 3 \mu F$$

$$7) \quad \frac{r_\ell I^2 - r_\ell I_T^2}{r_\ell I^2} = \frac{I^2 - (I \cos \phi)^2}{I^2} = 1 - \cos^2 \phi = \sin^2 \phi \approx \left(\frac{9}{10}\right)^2 \approx 80\%!$$

$$\boxed{D} \quad \begin{cases} 1) \frac{U_1 - V_-}{R_1} + \frac{U_S - V_-}{R_2} = 0 & (i_- = 0) \\ 2) \frac{U_2 - V_+}{R_3} + \frac{0 - V_+}{R_4} = 0 & (i_+ = 0) \end{cases}$$

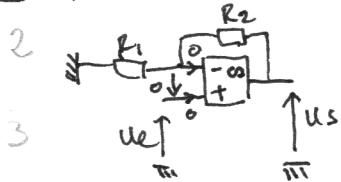
rétroaction négative \Rightarrow rég. linéaire
 $\Rightarrow A_0 \text{ ideal} \Rightarrow \epsilon = 0 \Rightarrow V_+ = V_- = V$

$$3) \Rightarrow \begin{cases} R_2 U_1 + R_1 U_S = (R_2 + R_1) V \\ R_4 U_2 = (R_3 + R_4) V \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_2 U_1 + R_1 U_S = \frac{R_2 + R_1}{R_3 + R_4} R_4 U_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_S = \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \frac{R_4}{R_1} U_2 - \frac{R_2}{R_1} U_1 \\ 4) \text{ Montage soustracteur.} \\ \text{Si } R_1 = R_2 = R_3 = R_4 \\ \Rightarrow U_S = U_2 - U_1. \end{cases}$$

E 1) Non reconnaissons un montage non-inverseur.

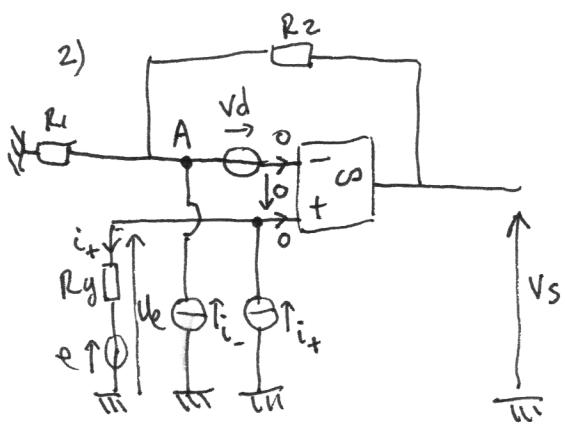


$$\begin{aligned} \text{1)} & \quad \text{Non reconnaissons un montage non-inverseur.} \\ \text{2)} & \quad \text{Circuit diagram: } U_e \rightarrow \text{circle+} \xrightarrow{\text{R}_1} \text{circle-} \xrightarrow{\text{R}_2} \text{V+} \xrightarrow{\text{RL}} \text{ground} \\ \text{3)} & \quad \text{Ue = e} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \epsilon = 0 \quad V_- = V_+ = U_e \\ \frac{0 - V_-}{R_1} + \frac{U_S - V_-}{R_2} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{U_S}{R_2} = U_e \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Rightarrow G = \frac{U_S}{U_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$G > 0$$



$$\text{en A: } \frac{0 - V_A}{R_1} + \frac{U_S - V_A}{R_2} + i_- = 0$$

$$\left. \begin{aligned} V_+ &= U_e = e + R_g i_+ \\ V_+ &= V_- \\ U_{AE_-} &= -V_d = V_A - V_- \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow V_A = V_+ - V_d$$

$$V_A = e - V_d + R_g i_+ \quad 10$$

$$\text{or: } \frac{U_S}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_A - i_- \Rightarrow \boxed{U_S = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) (e - V_d + R_g i_+) - R_2 i_-}$$

$$\left| \frac{U_S - U_{SUS}}{U_{SUS}} \right| = \left| \frac{\left(\frac{V_d + R_g i_+}{e} \right) - \frac{R_2}{R_1} i_+}{\frac{e}{e}} \right| \approx \left| \left(- \frac{40 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-1}} + \frac{2 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-1}} \right) - \frac{36 \cdot 10^{-4}}{4} \right|$$

écart relatif = 10 %

plus la tension d'entrée est faible, plus les défauts apparaissent.