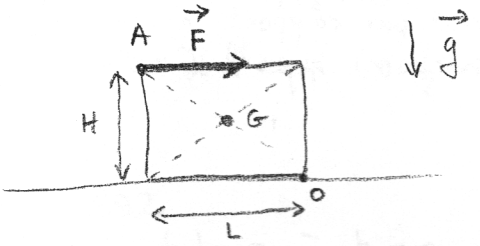
1h50' (95pts) **Devoir de Physique** 23/1/2007

(10)

1 1) Enoncé et démonstration du théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen. (5)

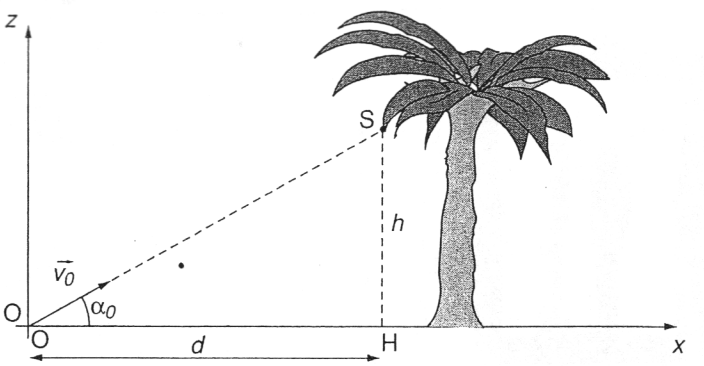
2) Soit une caisse posée sur le sol. Déterminez la force horizontale à exercer sur son bord supérieur pour que celle-ci commence à basculer. Son centre de masse est placé en G. Lorsqu'elle est soulevée elle effectue une rotation autour de O. (5)



Caisse de masse m.

Indication : La caisse se soulève lorsque l'équilibre entre les moments des forces du poids et de $\vec{F}$ est atteint.

(15) **2** Tir à l'arc



Un chasseur muni d'un arc vise un singe (S) perché sur un arbre.
La flèche quitte l'arc, en O, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ oblique, dirigée exactement vers le singe : si celui-ci restait en place, il ne serait pas touché car la flèche subit les effets de la pesanteur et sa trajectoire s'écarte de la droite OS.
Mais le singe se laisse tomber à l'instant exact où il voit la flèche quitter l'arc.
On appelle h l'altitude du singe et $d = OH$ la distance de sa projection H au point O de lancement de la flèche

$$\alpha_0 = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OS}).$$

1. En posant $\|\vec{v}_0\| = v_0$ et $\|\vec{g}\| = g$ (accélération de la pesanteur), donner les équations paramétriques des coordonnées $x_1(t)$ et $z_1(t)$ pour le singe (S) et $x_2(t)$ et $z_2(t)$ pour la flèche (F) [tous les deux sont supposés «ponctuels» confondus avec leur centre d'inertie, pour cet exercice]. (2 5 3)

2. Le singe sera-t-il touché ? (5)

3 Chute d'un palet le long d'une sphère

Un palet considéré comme un point matériel de masse m se trouve au sommet S d'une sphère de centre C et rayon R. On lui communique une vitesse $\vec{v}_0$ horizontale. Tant que le palet est en contact avec la sphère en un point M, on le repère grâce à l'angle $\theta = (\overrightarrow{CS}, \overrightarrow{CM})$. Pour quelle valeur de θ le contact cesse-t-il ? Calculer numériquement θ dans le cas où la vitesse v_0 est négligeable. On néglige tout frottement dans cet exercice.

[champ de pesanteur uniforme suivant (Sc)]

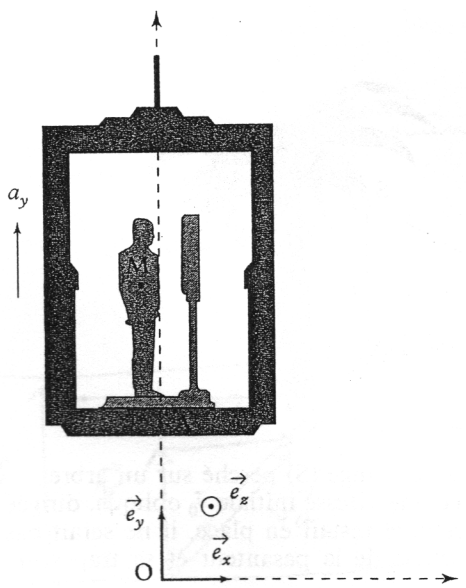
Indication : En multipliant l'équation du mouvement membre à membre par $\dot{\theta}$, puis en intégrant par rapport au temps, on montrera que : $R\dot{\theta}^2 = 2g(1-\cos\theta)$ quand $v_0 = 0$.

$\cos 48° \simeq \frac{2}{3}$

4 Ascenseur

On étudie l'indication donnée par un pèse-personne lorsqu'un homme M de masse $m = 80$ kg, se tient sur ce pèse-personne, dans un ascenseur. Le mouvement de l'ascenseur entre 2 étages se fait en 3 phases :

- une phase d'accélération constante : $a_y = 3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$,
- une phase à vitesse constante v_y = cte ;
- une phase de décélération constante : $a_y = -3\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.



On suppose que le référentiel $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est galiléen.

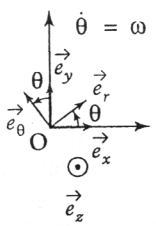
a) Déterminer la réaction du pèse-personne sur l'homme en fonction de m, g et a_y.

b) En déduire les valeurs indiquées par le pèse-personne au cours des différentes phases.

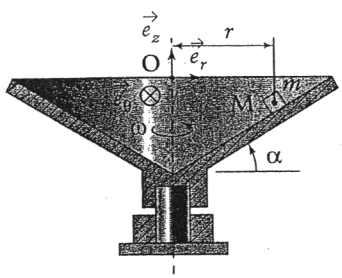
AN : $g = 10\ \text{m.s}^{-2}$

5 Eau en rotation

Une petite masse m est placée à l'intérieur d'un cône d'angle sur l'horizontale α. Le cône est en rotation autour de son axe vertical à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ = cte. On néglige tous les frottements. Le référentiel $\mathcal{R}_g(O ; \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est supposé galiléen.



vue de dessus



vue en coupe

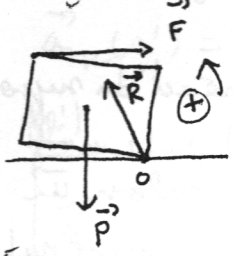
a) Déterminer l'angle α nécessaire au maintien de la masse à la distance r de l'axe de rotation.

b) En déduire la forme de la surface de l'eau dans le cas d'un récipient cylindrique rempli d'eau tournant autour de son axe.

Corrigé PCSi 95pts Devoir de physique 23/1/2007

1 1) cours 2) $\left(\frac{d\vec{\sigma_o}}{dt}\right)_R = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$ à l'équilibre : $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) = \vec{0}$

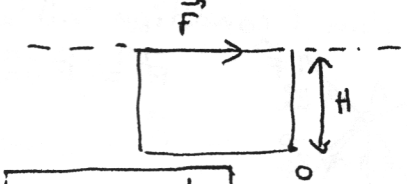
(10)

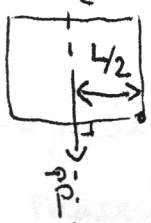


$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{R}) = \vec{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0}$ $\quad \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) = \vec{0}$

$\vec{OG} \wedge \vec{P} + \vec{OA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

$\|\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P})\| = P \times \frac{L}{2} = \frac{1}{2} mgL$





$\|\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})\| = FH$

à l'éq. : $\frac{1}{2} mgL = FH \Rightarrow$ $\boxed{F = \frac{mgL}{2H}}$

(15)

2 → exo Bac 1992

1) La flèche part de O à $t = 0$.

2 RFD pour une chute libre : $m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \Rightarrow \underline{\vec{a} = \vec{g}}$

Pour la flèche : $\begin{cases} \ddot{x}_2 = 0 \\ \ddot{y}_2 = 0 \\ \ddot{z}_2 = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_2(t) = cste = V_0 \cos\alpha_0 \\ \dot{y}_2(t) = cste' = 0 \\ \dot{z}_2 = -gt + cste'' = -gt + V_0 \sin\alpha_0 \end{cases}$

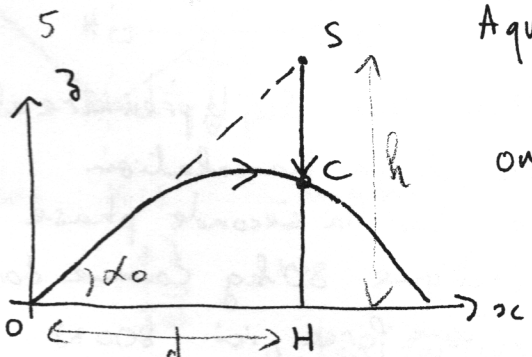
5

$\Rightarrow \begin{cases} x_2(t) = V_0 \cos\alpha_0 t + c \Rightarrow \underline{x_2(t) = V_0 \cos\alpha_0 t} \\ y_2(t) = c' = 0 \\ z_2(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + V_0 \sin\alpha_0 t + c'' \Rightarrow \underline{z_2(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + V_0 \sin\alpha_0 t} \end{cases}$

Pour le singe : $\begin{cases} \ddot{x}_1 = 0 \\ \ddot{y}_1 = 0 \\ \ddot{z}_1 = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{z}_1 = -gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1(t) = d} \\ y_1(t) = 0 \\ \underline{z_1(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + h} \end{cases}$

3

2) 5



A quel instant la flèche atteint le point C :

$x_2(t_c) = d = V_0 \cos\alpha_0 t_c \Rightarrow t_c = \frac{d}{V_0 \cos\alpha_0}$

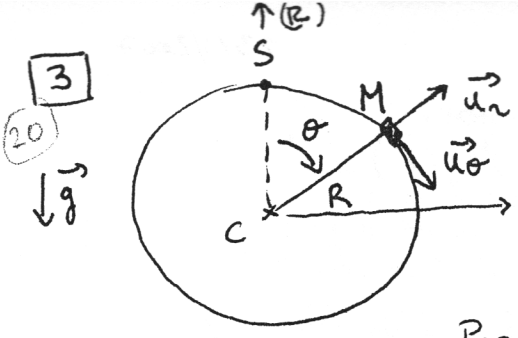
on a alors : $z_2(t_c) = -\frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_0^2 \cos^2\alpha_0} + \frac{V_0 \sin\alpha_0}{V_0 \cos\alpha_0} d$

$\Rightarrow z_2(t_c) = -\frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_0^2 \cos^2\alpha_0} + \underbrace{\tan\alpha_0 \, d}_{h}$

A cet instant avons nous : $z_1 = z_2$? $\quad z_1(t_c) = -\frac{1}{2} g \frac{d^2}{V_0^2 \cos^2\alpha_0} + h$

$\Rightarrow z_1 = z_2$ à t_c le singe est donc touché... (à ce qu'il paraît excellent en pôt-au-Feu).

3 (20)



(R) référentiel galiléen.

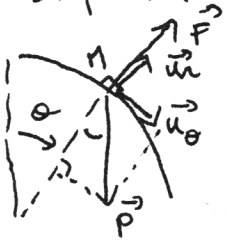
$\vec{CM} = R\vec{u_r}$

$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{CM}}{dt}\right)_{(R)} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ (2)

$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\vec{u_r}$ (2)

forces : $\vec{P}$, le poids et $\vec{F}$, la réact° du support.

Pas de frottement : $\vec{F} \perp \vec{v}$, de plus le mvt est plan (condition initiale et forces dans ce plan), donc $\vec{F}$ selon $\vec{u_r}$.



$\vec{F} = F\vec{u_r}$ $\quad F > 0$ $\Rightarrow$ le palet décolle qd devient nul.

$\vec{P} = -mg\cos\theta\,\vec{u_r} + mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

RFD : $m\vec{a} = \Sigma\vec{F}$

$\Rightarrow mR\ddot{\theta}\vec{u_\theta} - mR\dot{\theta}^2\vec{u_r} = F\vec{u_r} - mg\cos\theta\,\vec{u_r} + mg\sin\theta\,\vec{u_\theta}$

$\Rightarrow$ (6)
$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = F - mg\cos\theta \quad (1) \Rightarrow F = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} = mg\sin\theta \quad (2) \Rightarrow \underline{R\ddot{\theta} = g\sin\theta} \end{cases}$$

→ équation du mvt. (on a pas $\theta \ll 1$ à priori)

Suivant l'indication : $R\ddot{\theta}\dot{\theta} = g\sin\theta\,\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \int_{t=0}^{t} R\ddot{\theta}\dot{\theta}\,dt = \int_{t=0}^{t} g\sin\theta\,\dot{\theta}\,dt \Rightarrow \int_{t=0}^{t} R\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right)dt = \int_{0}^{t} g\frac{d}{dt}(-\cos\theta)\,dt$$

(5)
$$\Rightarrow R\left[\frac{\dot{\theta}^2}{2}\right]_0^t = g\left[-\cos\theta\right]_0^t \Rightarrow R\frac{\dot{\theta}^2}{2} = g\left(-\cos\theta(t) + \cos(\theta(t=0))\right)$$

car $\vec{v}(t=0) = \vec{v_0} = \vec{0} = R\dot{\theta}(t=0)\vec{u_\theta} \Rightarrow \dot{\theta}(t=0) = 0$

$\Rightarrow R\dot{\theta}^2 = 2g(1-\cos\theta)$ nous allons ainsi pouvoir calculer F en fonction de θ seulement : $F = mg\cos\theta - m(2g(1-\cos\theta))$

(2) $\Rightarrow F(\theta) = 3mg\cos\theta - 2mg \Rightarrow \underline{F = mg(3\cos\theta - 2)}$

(1) Le contact du palet cesse quand $F = 0$: $\Rightarrow 3\cos\theta_d - 2 = 0$

$\Rightarrow \cos\theta_d = \frac{2}{3}$ $\quad$ AN : $\underline{\theta_d \simeq 48°}$ (1)

4 (15) $m = 80$ kg. Soit (R') le référentiel de l'ascenseur. Sur la première et la troisième phase (R') est non galiléen car il y a translation rectiligne mais elle n'est pas uniforme. Sur la seconde phase (R') est galiléen donc le pèse personne indique 80 kg comme dans (Rg). Remarque : Un pèse personne mesure une force, ici 800 N.

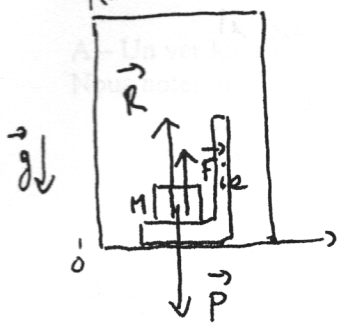
Phase 1 et 3 : $m\vec{a_r} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_{ie}} + \vec{F_{ic}} = \vec{0}$ car M immobile dans l'ascenseur

(3) $\vec{F_{ic}} = -m\vec{a_c} = -2m\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v_r} = \vec{0}$ car $\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{0}$, de plus $\vec{v_r} = \vec{0}$

$\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e}$; $\vec{a_e} = \vec{a}_R(O') + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt} \wedge \vec{O'M}}_{\vec{0}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{O'M})}_{\vec{0}}$

4 $\vec{a}_R(O') = \vec{a}_y = a_y \vec{e_y}$

$\Rightarrow \vec{R} = -\vec{P} - \vec{F_{ie}} = mg\vec{e_y} + ma_y\vec{e_y}$



$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_y}$ $\quad \vec{F_{ie}} = -ma_y\vec{e_y}$

$\Rightarrow \underline{\vec{R} = m(g+a_y)\vec{e_y}}$; $R = \|\vec{R}\| = m(g+a_y)$

4

b) Phase 1 : AN $R = 80(10+3) = 1040\,N \Rightarrow$ pendant l'accélération

1 le pèse personne indique : $\underline{104\,kg}$

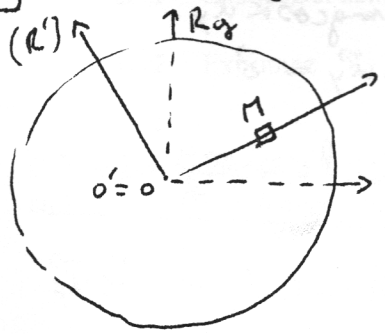
Phase 3 : AN $R = (80)(10-3) = 560\,N \Rightarrow$ pendant la

1 décélération il indique : $\underline{56\,kg}$

2 Phase 2 : cf a) $\rightarrow \underline{80\,kg}$

(15)

5 Vue du dessus



S : masse M(m) supposée ponctuelle.

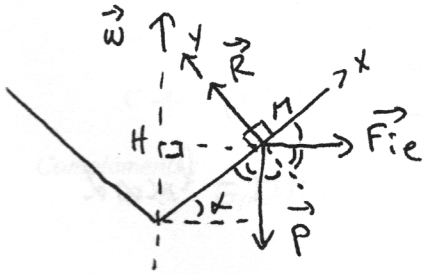
référentiel : (R') non galiléen, car référentiel tournant en rotation uniforme par rapport à (Rg)

force : $\vec{R}, \vec{P}, \vec{F_{ie}}, \vec{F_{ic}}$

$\vec{F_{ic}} = \vec{0}$ car $\vec{v}_r = \vec{0}$, M en équilibre relatif.

$\vec{R} \perp$ support car pas de Frottement.

$\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e} = -m\vec{a}_R(O) = m\omega^2 \vec{HM}$; $HM = r$



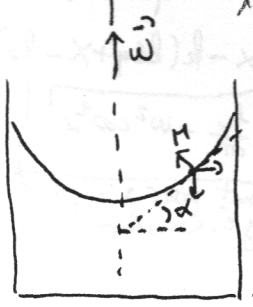
$R\vec{u_y} - mg\sin\alpha\,\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y}$

$+ m\omega^2 r\cos\alpha\,\vec{u_x} - m\omega^2 r\sin\alpha\,\vec{u_y} = 0$

(éq. relatif : $m\vec{a} = \vec{0} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{F_{ie}}$)

Selon x : $-mg\sin\alpha + m\omega^2 r\cos\alpha = 0 \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\omega^2 r}{g}$

10 $\underline{\alpha = \arctan\left(\frac{\omega^2 r}{g}\right)}$



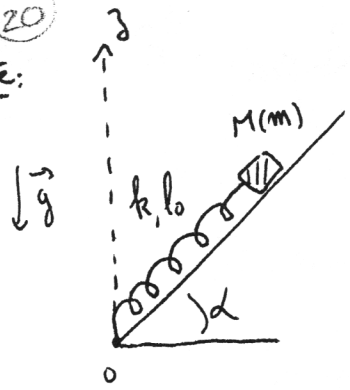
b) Les "particules" d'eau sont "posé" à sa surface et se maintiennent à l'éq..

$z(r)$; $\tan\alpha$ pente : $\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g}$

5 $\Rightarrow \underline{z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \text{Cste}}$ la surface de l'eau est un paraboloïde d'axe Oz.

6 20

Énoncé:

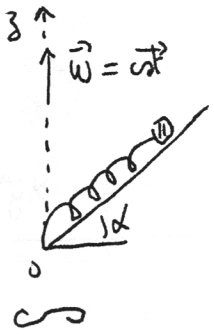


(R) galiléen.

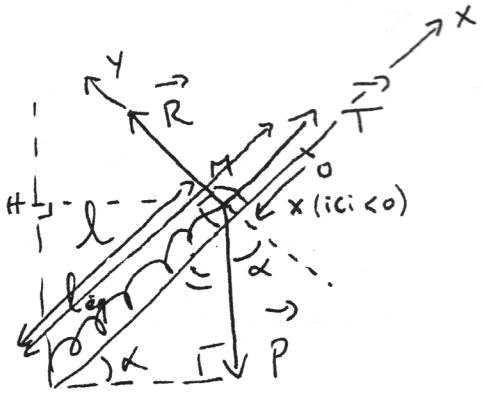
Absence de Frottements.

1) Longueur du ressort à l'équilibre. Pulsation des oscillations.

2) L'ensemble est maintenant mit en rotation autour de (oz). Mêmes questions qu'au 1) dans le référentiel tournant.



une Solution:



1) 8 Σ : M, masse m supposée ponctuelle.
référentiel (R) galiléen.
forces: $\vec{P}$, $\vec{T}$, $\vec{R}$.
$\vec{R} \perp$ au support en absence de frottements. Toutes les forces dans le plan: $\vec{R} = R\,\vec{u_y}$; $R = \|\vec{R}\|$

RFD à l'éq.: $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow -mg\sin\alpha\,\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y} - k(l_{éq} - l_0)\vec{u_x} + R\,\vec{u_y} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -mg\sin\alpha - k(l_{éq} - l_0) = 0 \\ R = mg\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{l_{éq} = l_0 - \frac{mg}{k}\sin\alpha}$$

en mvt: $-mg\sin\alpha\,\vec{u_x} - mg\cos\alpha\,\vec{u_y} - k(l_{éq} + X - l_0)\vec{u_x} + R\,\vec{u_y} = m\ddot{X}\,\vec{u_x}$

$$\Rightarrow \underbrace{-mg\sin\alpha - k(l_{éq} - l_0)}_{0} - kX = m\ddot{X} \Rightarrow \ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0$$

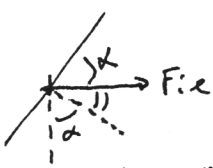
$$\Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

2) Les forces d'inerties s'ajoutent.

à l'éq. relatif: $\vec{F_{ic}} = \vec{0}$; $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e} = m\omega^2\vec{HM}$; $HM = l_{éq}\cos\alpha$

$\Rightarrow \vec{F_{ie}} = m\omega^2 l\cos\alpha(\cos\alpha\,\vec{u_x} - \sin\alpha\,\vec{u_y})$

D'où la condition d'éq selon ox: $-mg\sin\alpha + m\omega^2 l_{éq}\cos^2\alpha - k(l_{éq} - l_0) = 0$



$l_{éq}(k - m\omega^2\cos^2\alpha) = kl_0 - mg\sin\alpha$

en mvt: $-mg\sin\alpha + m\omega^2(l_{éq} + X)\cos^2\alpha - k(l_{éq} + X - l_0) = m\ddot{X}$

$$\boxed{l_{éq} = \frac{l_0 - \frac{mg}{k}\sin\alpha}{1 - m\frac{\omega^2}{k}\cos^2\alpha}}$$

Sinon le ressort casse ($l \to +\infty$).

$$\Rightarrow \ddot{X} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\cos^2\alpha\right)X = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2\cos^2\alpha}}$$

$l_{éq}$ et $\omega \exists$ si $\omega < \sqrt{\frac{k}{m\cos^2\alpha}}$

Volontairement pour simplifier $\vec{F_{ic}}$ à été négligé. Conséquences?