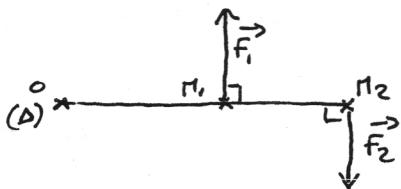


Tige: Soit une tige OM_2 en libre rotation autour d'un axe (Δ). O appartient à (Δ). La tige est perpendiculaire à (Δ). La tige est de masse négligeable.

La tige étant horizontale une force \vec{F}_2 s'exerce en M_2 selon la verticale descendante. Une deuxième force \vec{F}_1 s'exerce sur la tige en M_1 selon la verticale ascendante.

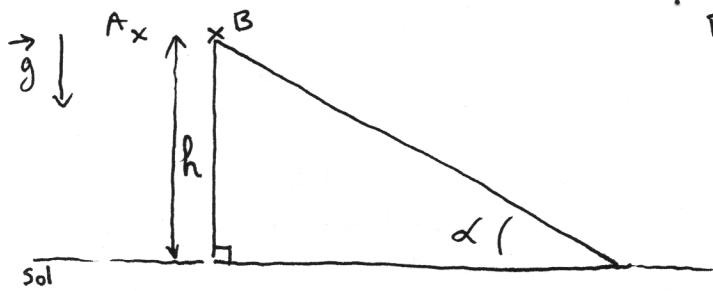
$$F_1 = \|\vec{F}_1\| ; F_2 = \|\vec{F}_2\| ; d_1 = OM_1 ; d_2 = OM_2$$

A l'équilibre quelle est la relation entre d_1 , d_2 , F_1 et F_2 ?



Chutes: Deux corps initialement sans vitesse, tombent au même instant et de la même hauteur.

A tombe en chute libre



B glisse sans frottement sur un plan incliné.

Déterminez, dans chacun des cas, les temps de chute et les vitesses à l'arrivée au sol.
Commentaires.

Ressort: Soit un point fixe O et une droite fixe ($x'x$) horizontale. Nous appelons H le projeté orthogonal de O sur ($x'x$).

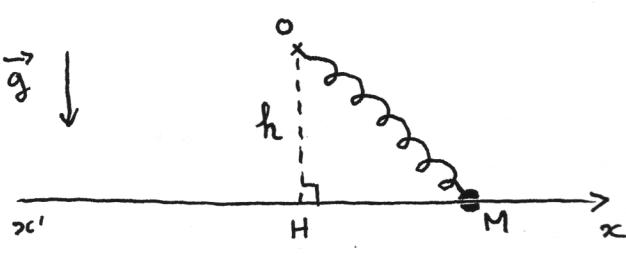
Un ressort, de raideur k et de longueur à vide l_0 , a l'une de ses extrémités attachée en O , et l'autre en M . M est un point matériel de masse m qui peut coulisser, sans frottement, sur la droite ($x'x$).

$$h = OH$$

1) Montrez que l'équation du mouvement s'écrit:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right) = 0$$

origine des x en H .

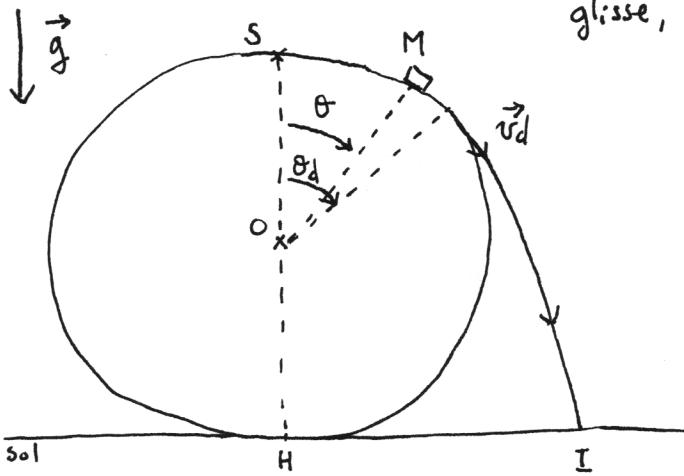


- 2) Déterminez les positions d'équilibre. Dans chaque cas, représentez sur un schéma les forces qui s'exercent en M . Indiquez si le ressort est comprimé ou étiré.
- 3) Déterminez l'équation différentielle des petites oscillations autour de chacune des positions d'équilibre. En cas de stabilité donnez l'expression de la pulsation des oscillations.

Palet sur une sphère:

Soit une sphère de rayon R , immobile, posée sur le sol. Un palet M , de masse m , glisse, sans frottement, sur la sphère.

Initialement le palet est au sommet S de la sphère sans vitesse.



- 1) Déterminez l'équation du mouvement du palet à la surface de la sphère.
 - 2) Retrouvez l'équation du mouvement avec le théorème du moment cinétique.
 - 3) Donnez l'expression de la réaction de la sphère sur le palet en fonction de θ , $\dot{\theta}$ et des données.
 - 4) Expliquez $\dot{\theta}$ en fonction de θ .
 - 5) En déduire la norme de la réaction en fonction de θ .
 - 6) Pour quelle valeur θ_d de θ le palet décolle de la sphère ?
 - 7) Le palet entre en contact avec le sol en I . Trouvez la distance HI en fonction de θ_d , $v_d = \|\vec{v}_d\|$, R et g .
- Exprimez HI en fonction de R .

2h

Tige : D'après le théorème du moment cinétique :

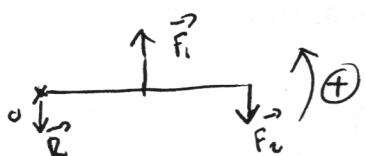
$$\left(\frac{d \vec{\omega}_o(M)}{dt} \right)_R = \vec{M}_o(\vec{F}) , \text{o fixe dans } R \text{ galiléen. A l'équilibre aucunes des grandeurs ne dépendent du temps.}$$

$$\Rightarrow \frac{d \vec{\omega}_o}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_o(\vec{F}_1) + \vec{M}_o(\vec{F}_2) = \vec{0} \quad \begin{matrix} y: \text{latige} \\ + \vec{M}_o(\vec{R}) \end{matrix} \quad (\vec{M}_o(\vec{R}) = \vec{0})$$

$$\| \vec{M}_o(\vec{F}_1) \| = d_1 F_1 \quad \left. \begin{matrix} \|\vec{M}_o(\vec{F}_2)\| = d_2 F_2 \\ \text{sachant que } \vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{0} \wedge \vec{F}, \text{ n pt d'application de la force.} \end{matrix} \right\}$$

$$\| \vec{M}_o(\vec{P}) \| = d F, \quad d: \text{distance à la droite support de force}$$

F : norme de la force.



Prenant le sens positif dans le sens trigonométrique on obtient :

$$d_1 F_1 - d_2 F_2 = 0 \Rightarrow \boxed{d_1 F_1 = d_2 F_2} \quad \begin{matrix} \text{Par exemple si} \\ d_2 = 2 d_1 \Rightarrow F_1 = 2 F_2 \end{matrix}$$

Chutes :

$$A: \text{ RFD: } m \vec{a}_A = m \vec{g} = -m g \vec{u}_3 = m \ddot{\gamma}_A \vec{u}_3 \Rightarrow \ddot{\gamma}_A = -g$$

$$\begin{array}{l} \text{h} \uparrow \vec{u}_3 \text{ n(t=0)} \quad \text{Au moment de l'arrivée au sol : } \dot{\gamma}_A = 0 \quad \Rightarrow \dot{\gamma}_A = -gt + 0 \\ \downarrow \vec{g} \quad \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} g t_c^2 + h \quad \Rightarrow \dot{\gamma}_A = -\frac{1}{2} g t^2 + h \\ \Rightarrow t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad v_{sol} = \dot{\gamma}_A(t_c) = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \vec{v}_{A \text{ sol}} = -\sqrt{2gh} \vec{u}_3 \end{array}$$

$$B: \begin{array}{l} \text{m} \vec{a}_B = \vec{m} \vec{g} + \vec{R} ; \vec{a}_B = \ddot{x}_B \vec{u}_x + \ddot{y}_B \vec{u}_y \quad \Rightarrow \boxed{v_{A \text{ sol}} = \sqrt{2gh}} \\ \text{Sur } x: m \ddot{x}_B = mg \sin \alpha \quad \text{car } y_B = \text{const} = 0 \\ \text{(équation du mvt)} \quad \Rightarrow \ddot{x}_B = g \sin \alpha \\ \Rightarrow x_B = g \sin \alpha t + 0 \\ \Rightarrow x_B = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 + 0 \end{array}$$

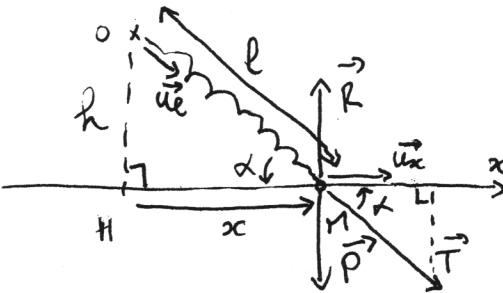
$$\text{Arrivée au sol telle que } x_{sol} = \frac{h}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} g \sin \alpha t_{sol}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{t_{sol} = \frac{1}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad \begin{matrix} \ddot{x}_B(sol) = g \sin \alpha t_{sol} \\ \vec{v}_B(sol) = +\sqrt{2gh} \vec{u}_x \end{matrix} \Rightarrow \boxed{v_{B \text{ sol}} = \sqrt{2gh}}$$

Les deux masses arrive au sol avec une vitesse de norme par contre A arrive au sol avant B.

Ressort 1)

\vec{u}_e : dans le sens de l'étirement.



$$RFD: \vec{m}\vec{a} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{T}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

le mvt étant rectiligne sur l'axe des $x \Rightarrow y = \text{cste}, z = \text{cste}$
 $\Rightarrow \vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$

Nous projettions selon x :

$$m\vec{a} \cdot \vec{u}_x = \vec{R} \cdot \vec{u}_x + \vec{P} \cdot \vec{u}_x + \vec{T} \cdot \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = 0 + 0 + T \cos x \quad \text{avec } T = -k(l - l_0)$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} = -k(\sqrt{x^2 + h^2} - l_0) \frac{x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_0}{m} x \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + x^2}}\right) = 0 \quad \text{CQFD}$$

2) à l'équilibre: $x_c = \text{cste} = x_{eq} \Rightarrow \ddot{x} = 0$

$$\Rightarrow \frac{k}{m} x_{eq} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + x_{eq}^2}}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{eq} = 0 \\ \sqrt{h^2 + x_{eq}^2} = l_0 \end{cases}$$

$$\sqrt{h^2 + x_{eq}^2} = l_0 \Rightarrow x_{eq} = \pm \sqrt{l_0^2 - h^2}$$

existent si $l_0 > h$

si $l_0 < h$: une seule position d'équilibre en $x = 0$.

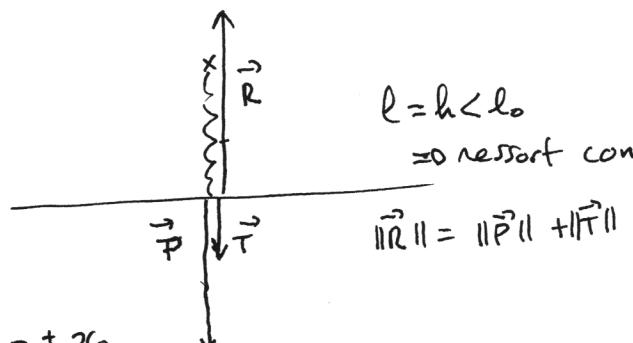
Le ressort y est étiré.

$$\vec{R} + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

Si le ressort est étiré: \vec{T} en sens inverse de \vec{u}_e . $l > l_0$ et $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_e$

si $l_0 > h$

$$x_{eq} = 0$$



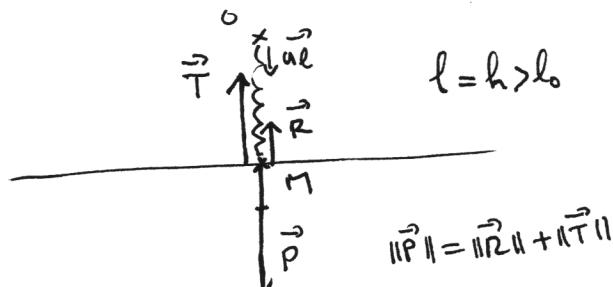
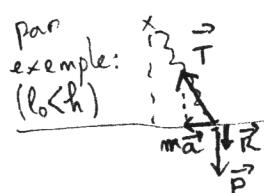
$$x_{eq} = \pm \sqrt{l_0^2 - h^2} = \pm x_0$$

(deux cas symétriques)

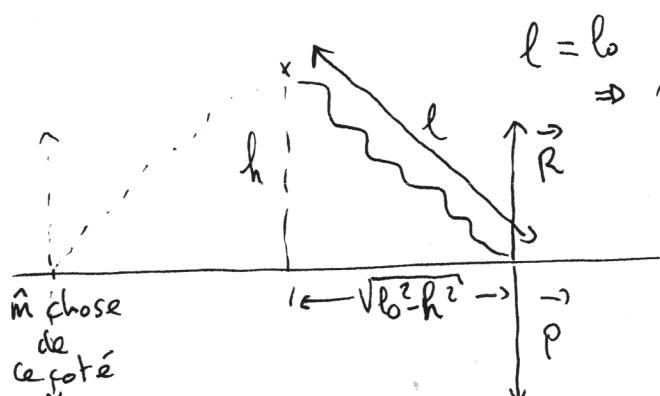
$$x_0^2 = l_0^2 - h^2$$

$$h^2 + x_0^2 = l_0^2$$

info hors équilibre $\vec{a} \neq \vec{0}$



$$\|\vec{P}\| = \|\vec{R}\| + \|\vec{T}\|$$



$l = l_0$
 \Rightarrow ressort non tendu
 $\Rightarrow \vec{T} = \vec{0}$

à droite de ce côté

$$3) \quad \underline{x_{eq}=0} : \quad x = x_{eq} + \varepsilon = \varepsilon \quad \ddot{x} = \ddot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \varepsilon \left(1 - \frac{\ell_0}{\hbar}\right) = 0 ; \quad \sqrt{\hbar^2 + \varepsilon^2} = \hbar \text{ au premier ordre non nul.}$$

$$\ddot{\varepsilon} + \underbrace{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{\hbar}\right)}_{\Rightarrow \text{ si } \ell_0 < \hbar} \varepsilon = 0$$

Si $\ell_0 < \hbar$: oscillation autour de la pulsation d'équilibre de pulsation :

$$\boxed{w_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{\ell_0}{\hbar}\right)}}$$

$$\text{Si } \ell_0 > \hbar : \quad \ddot{\varepsilon} - \alpha^2 \varepsilon = 0$$

Solution du type : $\varepsilon(t) = \alpha e^{\pm \lambda t}$ $\lambda = \pm \alpha$, la solution $\varepsilon(t) = \alpha e^{\pm \alpha t}$ tend vers $+\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$
 \Rightarrow la solution diverge, l'équilibre est alors instable.

$$\underline{x_{eq} = \pm \ell_0} : \quad x = \ell_0 + \varepsilon \quad \ddot{x} = \ddot{\varepsilon}$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} (\ell_0 + \varepsilon) \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\hbar^2 + (\ell_0 + \varepsilon)^2}}\right) = 0$$

$$\text{à l'ordre zéro: } \ell_0 + \varepsilon \approx \ell_0 \Rightarrow 1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\hbar^2 + \ell_0^2}} = 0$$

$$\text{il faut donc pousser à l'ordre 1: } (\ell_0 + \varepsilon)^2 = \ell_0^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\ell_0}\right)^2 \approx \ell_0^2 \left(1 + 2 \frac{\varepsilon}{\ell_0}\right)$$

$$\sqrt{\hbar^2 + (\ell_0 + \varepsilon)^2} \approx \sqrt{\hbar^2 + \ell_0^2 + 2\varepsilon\ell_0} \approx \ell_0 \sqrt{1 + 2 \frac{\varepsilon\ell_0}{\hbar^2}} \approx \ell_0 \left(1 + \varepsilon \frac{\ell_0}{\hbar^2}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} (\ell_0 + \varepsilon) \left(1 - \left(1 - \varepsilon \frac{\ell_0}{\hbar^2}\right)\right) = 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} (\ell_0 + \varepsilon) \varepsilon \frac{\ell_0}{\hbar^2} = 0$$

$$\text{on ne garde que l'ordre 1 (terme en } \varepsilon^2 \text{ négligé}): \quad \ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \frac{\ell_0^2}{\hbar^2} \varepsilon = 0$$

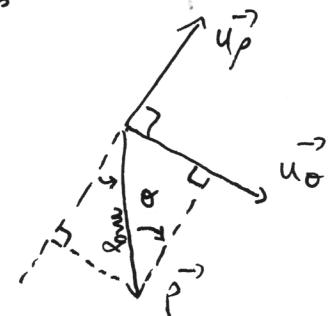
$$\Rightarrow \boxed{w_0 = \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 - \frac{\hbar^2}{\ell_0^2}\right)}} \quad \text{lorsqu'il existe l'équilibre est stable}$$

Palet sur une sphère: 1) $\vec{O\bar{n}} = R\vec{u}_p$ $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ $\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_p$

RFD: $\vec{P} + \vec{R_N} = m\vec{a}$ $\vec{R_N} = +R_N\vec{u}_p$
 $\vec{P} = -mg\cos\theta\vec{u}_p + mg\sin\theta\vec{u}_\theta$

$$\begin{pmatrix} -mg\cos\theta \\ mg\sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_N \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mR\ddot{\theta} \\ mR\dot{\theta}^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

D'où l'équation du mvt: $\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$



2) $\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{M}_o(\vec{P}) + \vec{M}_o(\vec{R_N}) = \vec{OM} \wedge \vec{mg} + \vec{OM} \wedge \vec{R_N}$
 $= R\vec{u}_p \wedge (-mg\cos\theta\vec{u}_p + mg\sin\theta\vec{u}_\theta)$
 $= +mgR\sin\theta\vec{u} \quad \vec{u} = \vec{u}_p \wedge \vec{u}_\theta$

$$\vec{G_o} = \vec{O\bar{n}} \wedge \vec{P} = \vec{O\bar{n}} \wedge m\vec{v} = R\vec{u}_p \wedge mR\dot{\theta}\vec{u}_\theta = mR^2\dot{\theta}\vec{u}$$

$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = mR^2\dot{\theta}\vec{u}$ car $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{0}$ \vec{u} vecteur constant lors du mvt, ici plan.

$\Rightarrow mR^2\ddot{\theta} = mgR\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0 \Rightarrow$ équation.

3) (1) $\Rightarrow R_N = -mR\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta \Rightarrow R_N = m(-R\dot{\theta}^2 + g\cos\theta)$

4) Il faut trouver l'intégrale première du mvt: $\ddot{\theta} - \frac{g}{R}\sin\theta = 0$

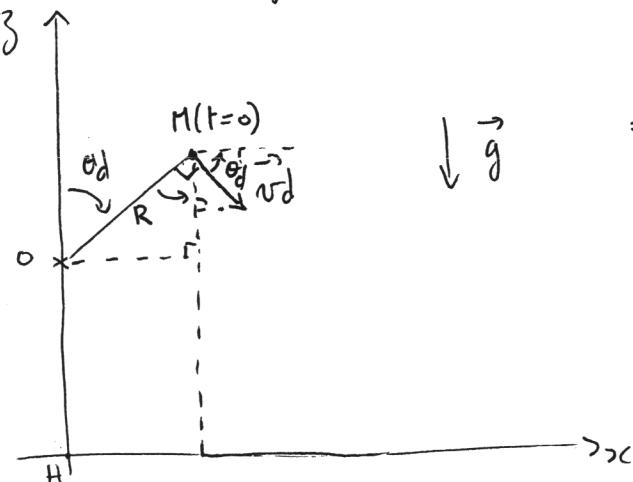
$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{g}{R}\cos\theta = \text{cte} = 0 + \frac{g}{R} \text{ car } \vec{v}(t=0) = R\dot{\theta}(t=0)\vec{u}_\theta = \vec{0} \text{ et } \theta(t=0) = 0.$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2/2 = -\frac{g}{R}(\cos\theta - 1) \Rightarrow \dot{\theta} = \sqrt{2\frac{g}{R}(1-\cos\theta)} \quad \dot{\theta} > 0$$

5) $\Rightarrow R_N = m(2g(\cos\theta - 1) + g\cos\theta) \Rightarrow R_N = mg(3\cos\theta - 2)$

6) Le palet décolle quand: $R_N = 0 \Rightarrow \cos\theta_d = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_d = \arccos \frac{2}{3}$

7) H origine des x et des y. Pb de chute libre: $m\vec{a} = \vec{mg}$



$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_d \cos\theta_d \\ \dot{z} = -gt - v_d \sin\theta_d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_d \cos\theta_d t + R \sin\theta_d \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 - v_d \sin\theta_d t + R(1 + \cos\theta_d) \end{cases}$$

$$\text{en I: } \ddot{\gamma} = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2}g t_I^2 - \nu d \sin \theta d t_I + R(1 + \cos \theta d)$$

$$\Rightarrow t_I^2 + \frac{2\nu d \sin \theta d}{g} t_I - \frac{2R}{g}(1 + \cos \theta d) = 0$$

$$\Rightarrow t_I = -\frac{\nu d \sin \theta d}{g} \pm \sqrt{\frac{\nu d^2}{g^2} \sin^2 \theta d + \frac{2R}{g}(1 + \cos \theta d)}$$

$$\Rightarrow \underline{H_I = x(t_I)} = \underline{-\frac{\nu d^2}{g} \sin \theta d \cos \theta d + \nu d \cos \theta d \sqrt{\frac{\nu d^2}{g^2} \sin^2 \theta d + \frac{2R}{g}(1 + \cos \theta d)}} + R \sin \theta d$$

$$\cos \theta d = \frac{2}{3} \Rightarrow \sin \theta d = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\nu d = R \dot{\theta}(0) = R \sqrt{2 \frac{\alpha}{R} (1 - \frac{2}{3})} = \sqrt{\frac{2}{3} g R}$$

$$H_I = -\frac{2}{3} R \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{2}{3} g R} \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{R}{g} \frac{5}{3} + \frac{2R}{g} \frac{5}{3}} + R \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$H_I = R \left[-\frac{2^2 \sqrt{5}}{3^3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sqrt{\frac{5}{9} + 5} + \frac{\sqrt{5}}{3} \right] = \frac{R}{3^3} \sqrt{5} \left[-2^2 + 2^2 \underbrace{\sqrt{10}}_{2^2 \times \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} + 9 \right]$$

$$so = 5^2 \times 2$$

$$H_I = \frac{\sqrt{5}}{3^3} R \left[5 + 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \right] \Rightarrow H_I = \frac{5}{3^3} (\sqrt{5} + 4\sqrt{2}) R$$

✓