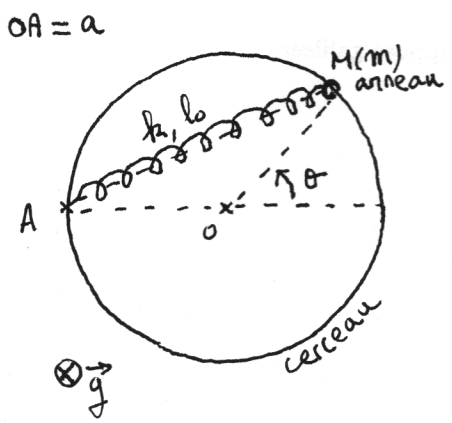
PCSi 4h

Pas de Calculatrice

Devoir de Physique

Samedi 17 novembre 2007

Cerceau : Soit un cerceau horizontal. Un anneau enfilé sur le cerceau coulisse sans frottement. Un ressort est relié d'un point fixe du cerceau à l'anneau.



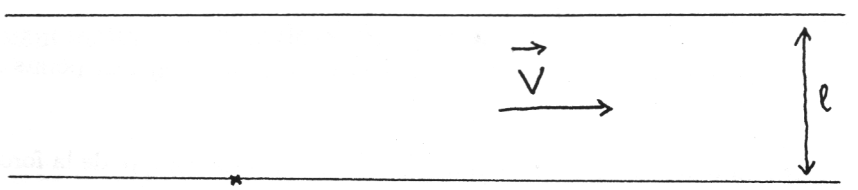
1. Déterminez la longueur du ressort $l = AM$ en fonction de θ et des données.

2. Exprimez l'énergie potentielle du point matériel M en fonction de θ.

3. Positions d'équilibre et Stabilité.
On tracera l'allure de la courbe $E_p(\theta)$ dans les différents cas.

Bateaux

Deux bateaux traversent une rivière de largeur l ; leur vitesse par rapport à l'eau est $\vec{v}$= **cte**, la vitesse du courant est $\vec{V}$= **cte**.
Le premier met le temps le plus court, le second emprunte le chemin le plus court. Comparer les durées mises par les deux bateaux pour traverser la rivière.



Atomes

La force qui s'exerce entre deux atomes d'une molécule diatomique est donnée par:

$$\vec{F} = -\alpha / x^7 + \beta / x^{13}\ \vec{u}_x$$

où x désigne la distance intermoléculaire et α et β sont des constantes positives.

1 - Déterminer l'expression de l'énergie potentielle U(x) dont dérive cette force (on prendra l'énergie potentielle à l'infini nulle).

2 - Les masses des deux atomes sont M et m (M>m). En supposant que l'atome de masse M reste au repos en un point O, tandis que l'autre peut se déplacer sur la droite (Ox), trouver les différents mouvements possibles à l'aide du graphe de la fonction U(x).
Quelle est, à l'équilibre, la distance xo entre les deux noyaux?

3 - Déterminer la pulsation des oscillations autour de la position d'équilibre.

4 - Déterminer l'énergie nécessaire pour séparer les deux atomes (énergie de dissociation).

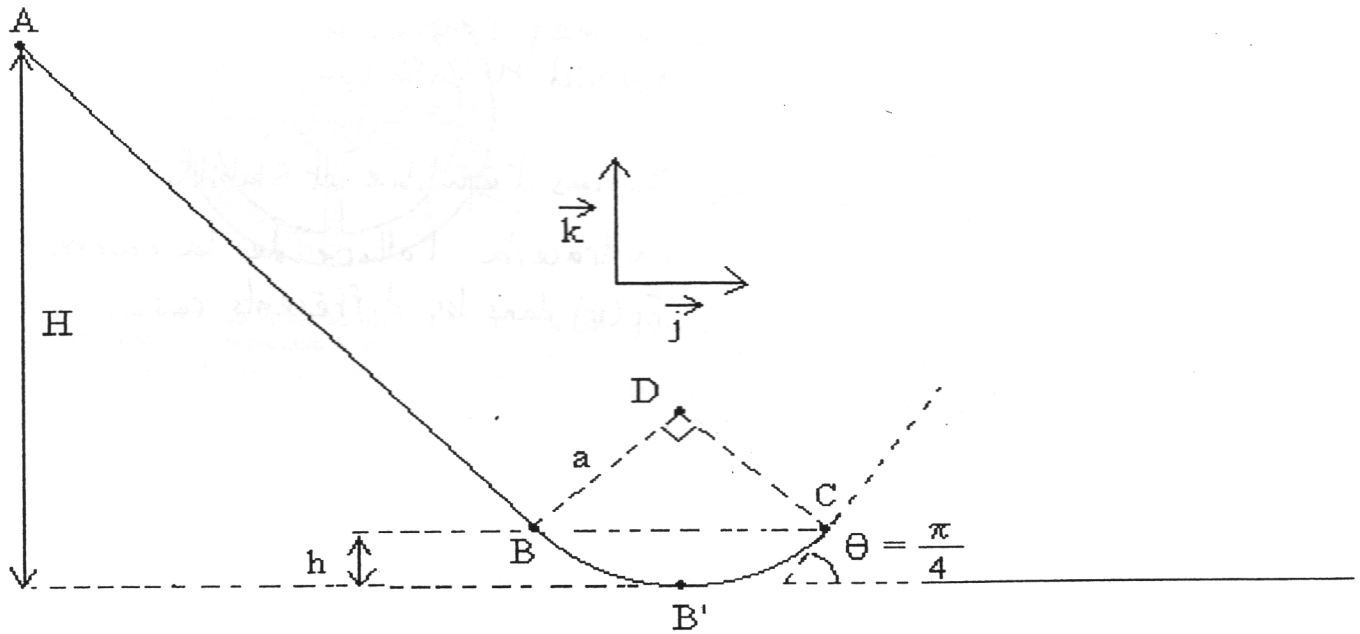
Le skieur

Un skieur, que l'on assimile à un point matériel, démarre du haut d'un tremplin (point A), avec une vitesse initiale nulle.

Le tremplin est modélisé entre les point A et B, par un plan incliné d'un angle $\theta = \frac{\pi}{4}$ par rapport à l'horizontale. La trajectoire du skieur entre les points B et C est un arc de cercle de centre D et de rayon a.

Au-delà du tremplin, la piste est à la même hauteur que le point B'.

On note $\vec{g}$, l'accélération de la pesanteur et $(\mathcal{R})$ le référentiel terrestre supposé galiléen.



1- Enoncer le théorème de l'énergie cinétique.

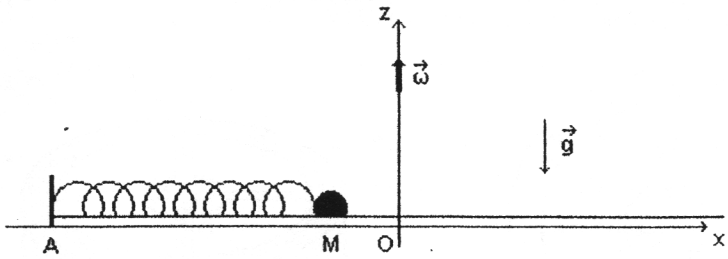
2- En négligeant les frottements avec la piste, calculer la vitesse du skieur aux points B' et C, en fonction de H, h et g.

3- Quelle est la trajectoire du skieur au delà du point C? (on tiendra compte de la force de frottement avec l'air en introduisant la force $\vec{F}_f = -k\vec{v}_{M,\mathcal{R}}$).

4- On néglige la résistance de l'air. On note L, la distance horizontale entre le point C et le point d'arrivée du skieur sur la piste horizontale. Calculer L en fonction de H, h

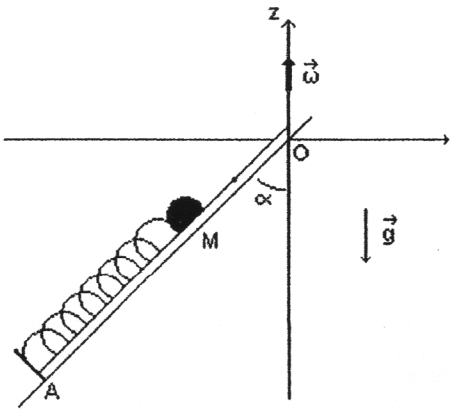
Mouvement sur une glissière tournante

Un système est constitué d'une glissière soudée sur un bâti mobile autour d'un axe verticale (Oz). Cette glissière est horizontale. Sur la glissière, est posé un solide de masse m, qui peut glisser sans frottement sur la glissière. Ce solide, que l'on assimilera à un point matériel M, est accroché à un ressort à spires non jointives, de raideur k, de longueur à vide lo dont l'extrémité est fixée en A. Nous posons AO=L et considèrerons le cas où L>lo.
Le système est mis en rotation dans un référentiel supposé galiléen autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω.



I - 1 - a - Faire un schéma des forces à l'équilibre.
b - Donner l'expression de l'énergie potentielle Ep de M en fonction de x, dans le référentiel tournant lié à la glissière.
c - Déterminer la position d'équilibre xéq.
d - Quelle est la condition sur ω pour que l'équilibre soit stable?
2 - a - Déterminer la valeur de ω pour laquelle la masse vient se bloquer en A.
b - Tracer la courbe de xéq en fonction de ω pour x>-L.
c - Indiquer l'allure de Ep(x) suivant la valeur de ω.
d - Que se passe-t-il si partant de ω=0 on augmente lentement la vitesse angulaire?
e - Que peut-il se produire si pour $\omega > \sqrt{(k/m)}$ nous plaçons la masse en sa position d'équilibre?
3 - Déterminer la pulsation des oscillations autour de la position d'équilibre stable.

II- La glissière est maintenant inclinée d'un angle α fixe par raport à la verticale.



1 - Déterminer la longueur à l'équilibre du ressort
2 - Déterminer la pulsation des oscillations.
3 - Pour quelle vitesse angulaire la masse décolle de la glissière?

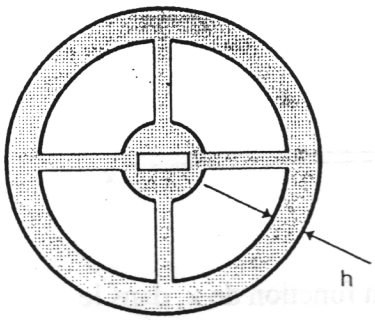
- 2001, l'odyssée de l'espace

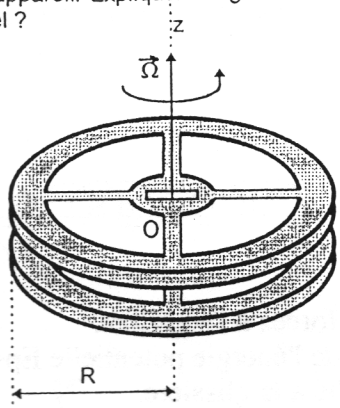
Dans le film '2001, l'odyssée de l'espace' Stanley Kubrick envisage de faire tourner la cabine des engins spatiaux afin de réaliser une pesanteur artificielle à l'intérieur de ceux-ci. Ce problème envisage qualitativement les particularités de cette solution.

- 1 Pesanteur artificielle

1.1 Dans quel référentiel doit-on se placer pour interpréter l'existence d'une pesanteur artificielle ?

1.2 Le vaisseau représenté ci-dessous est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz. Les cosmonautes occupent la périphérie de l'appareil. Expliquer l'origine de la pesanteur artificielle. Peut-on parler de champ gravitationnel artificiel ?





1.3 Le rayon du vaisseau est R = 160 m. Calculer la vitesse angulaire Ω pour que la pesanteur artificielle soit comparable à celle régnant sur terre (on prendra g = 10 m.s^{-2}). En déduire la période de révolution du vaisseau autour de lui-même. AN : $\pi \simeq 3$

1.4 La zone habitable du vaisseau a une hauteur h. Donner l'expression du champ de pesanteur artificiel g_A en coordonnées cylindrique. Quelle est la symétrie de ce champ. Est-il uniforme ?

Tracer l'allure de g_A en fonction de r (rayon en coordonnées cylindriques) dans la zone habitable. Que vaut la variation relative de g_A dans cette zone ? (on donne h = 32 m). AN : $1/9 \simeq 0{,}11$

1.5 Un individu immobile dans ce vaisseau peut-il se rendre compte du caractère artificiel de son poids ?

- 2 Mouvements à bord du vaisseau

2.1 Un cosmonaute décide de faire son jogging sur la périphérie du vaisseau. Il court à la vitesse v_0 dans le sens opposé à celui de la rotation du vaisseau (figure 1). En quoi l'étude du mouvement est-elle modifiée par rapport à la partie précédente ?

2.2 Indiquer sur un schéma les différentes forces qui s'exercent sur le coureur et en donner l'expression. Quel effet relatif - inexplicable dans un champ de pesanteur usuel - le coureur perçoit-il? Préciser sa direction et son sens.

2.3 Le coureur accélère. L'effet précédent est-il modifié, et si oui comment ?

2.4 Le coureur change son sens de parcours (il court dans le sens de rotation du vaisseau). L'effet précédent est-il modifié ?

1.5 Deux cosmonautes jouent à se lancer une balle (figure 2). Comment celui de gauche doit il lancer la balle pour atteindre son collègue ?
Comment celui de droite doit-il lui retourner ?

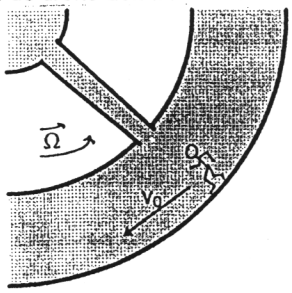


Figure 1: jogging

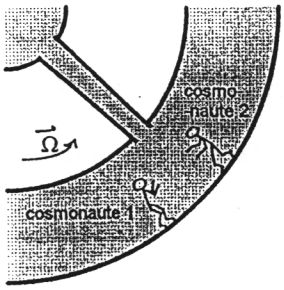


Figure 2: partie de ballon

4h

Devoir de Physique - Correction - PCSI

153pts

17 nov 2007

20pts

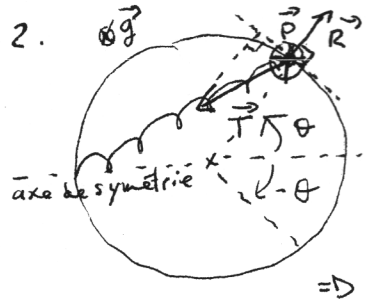
Cerceau : 1. $\ell = AM$; $\ell^2 = (\vec{AO}+\vec{OM}).(\vec{AO}+\vec{OM}) = a^2 + 2\vec{AO}.\vec{OM} + a^2$

$= 2a^2 + 2a^2\cos\theta \Rightarrow \ell = a\sqrt{2(1+\cos\theta)}$

$\theta \in]-\pi,\pi[$; $\cos\theta/2 > 0$

$\Rightarrow \boxed{\ell = 2a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ 3

2.



Il n'y a pas de frottement $\vec{R} \perp$ au déplacement, seule $\vec{T}$ travaille (Force de plus conservative). $\vec{P} \perp$ déplacement.

$\Rightarrow E_p = E_{p_{élastique}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$

$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right)^2}$ 3

$E_p(\theta)$: fonction paire.

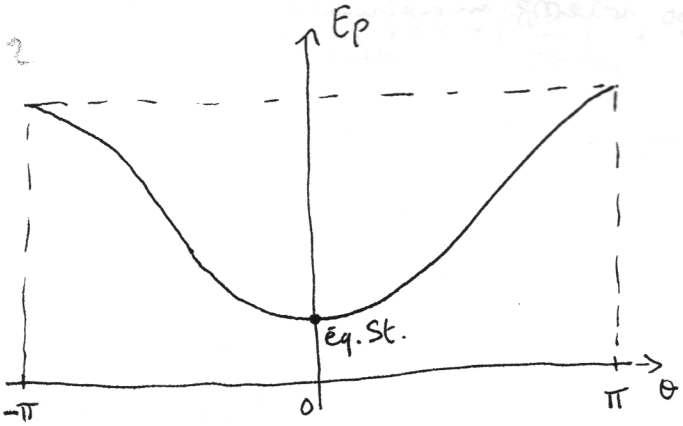
3. Equilibre : $\left(\frac{dE_p}{d\theta}\right)_{éq} = 0$ 1

$$\frac{dE_p}{d\theta} = \frac{1}{\cancel{2}}k\,\cancel{2}\left(\cancel{2}a\frac{1}{\cancel{2}}(-)\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right) = -ka\sin\frac{\theta}{2}\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right)$$

2 3

$$éq \begin{cases} \sin\frac{\theta}{2} = 0 \\ \text{ou} \\ 2a\cos\frac{\theta}{2} = \ell_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_{éq} = 0 \\ \text{ou} \\ \theta_{éq} = \pm \underbrace{2\arccos\left(\frac{\ell_0}{2a}\right)}_{\theta_0} \text{ si } \ell_0 < 2a \end{cases}$$

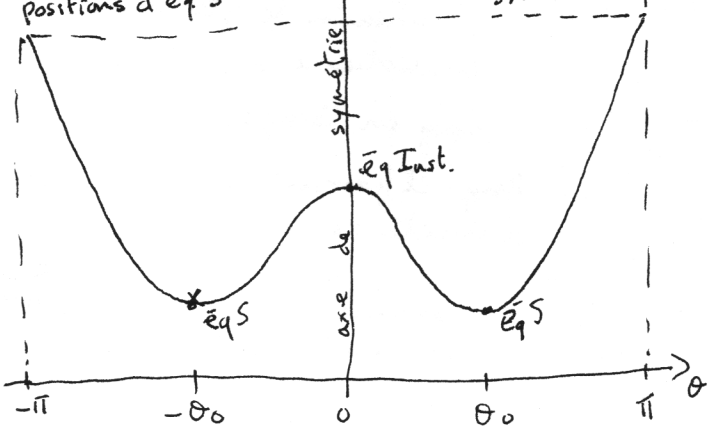
$\ell_0 > 2a$: ressort constamment comprimé



$\ell_0 < 2a$ ressort étiré pour $\theta \in]-\theta_0, \theta_0[$ comprimé sinon.

rmq : Le S choisit une des deux positions d'éq S

$\Rightarrow$ il y a brisure de symétrie



Stabilité : $\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{éq} > 0$ 1

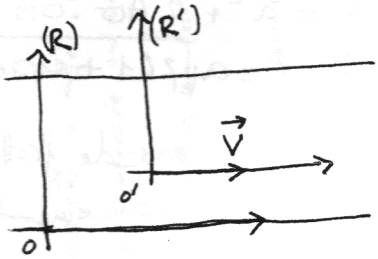
$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -\frac{ka}{2}\cos\frac{\theta}{2}\left(2a\cos\frac{\theta}{2} - \ell_0\right) - ka\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 2a\frac{1}{2}(-)$$

$$\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_{éq}=0} = -\frac{ka}{2}(2a - \ell_0) \begin{cases} >0 \text{ si } \ell_0 > 2a \text{ stable} \\ <0 \text{ si } \ell_0 < 2a \text{ instable} \end{cases}$$ 2

$$\left(\frac{d^2E_p}{d\theta^2}\right)_{\theta_{éq}=\pm\theta_0} = ka^2\left(\sin\frac{\theta_0}{2}\right)^2 > 0 \text{ Stable}$$

$\theta_{éq}$	0	$\pm\theta_0$
$\ell_0 > 2a$	S	
$\ell_0 < 2a$	I	S

Bateaux Deux référentiels : (R) des berges , (R') de la rivière



Dans (R') l'eau est immobile.
(R') est en translation rectiligne uniforme par rapport à (R) :

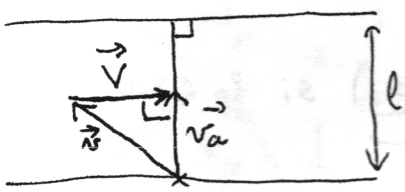
$$\vec{v_e} = \vec{v}_R(O') = \vec{V}.$$

$\vec{v_a} = \vec{v}_R(B)$: vitesse du bateau par rapport à la berge.

$\vec{v_r} = \vec{v}_{R'}(B)$: " " " " " " l'eau : $\vec{v_r} = \vec{v}$

2 loi de composition des vitesses : $\underline{\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r} = \vec{V} + \vec{v}}$

Second bateau (') : chemin le plus court donc $\boxed{(\Delta d)' = \ell}$, donc $\vec{v_a} \perp$ aux berges.



$$v_a = \frac{(\Delta d)'}{(\Delta t)'} \Rightarrow (\Delta t)' = \frac{\ell}{v_a}$$

4 $v^2 = V^2 + v_a^2$

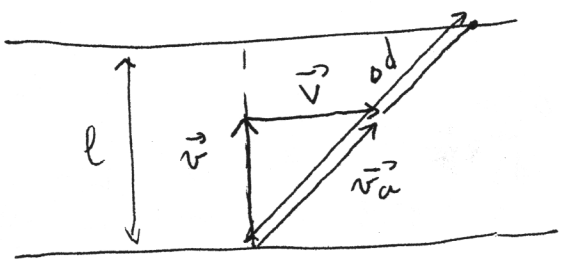
$$\Rightarrow \boxed{(\Delta t)' = \frac{\ell}{\sqrt{v^2 - V^2}}}$$

possible si $v > V$: si le bateau va plus vite que le courant.

Premier bateau : temp minimal $\Rightarrow$ vitesse maximale perpendiculaire aux berges.

$\Rightarrow \vec{v} \perp$ au berges.

$$v_a = \frac{\Delta d}{\Delta t} \qquad \frac{\Delta d}{\ell} = \frac{v_a}{v}$$



4

$$\boxed{\Delta d = \ell \sqrt{1 + \frac{V^2}{v^2}}}$$

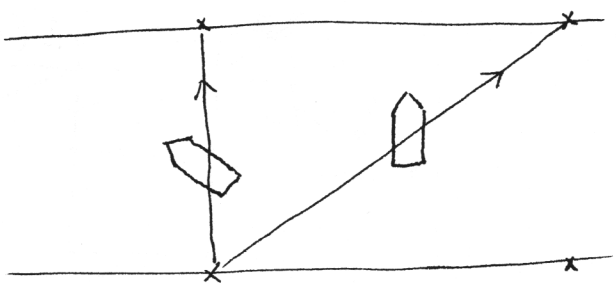
$v_a^2 = v^2 + V^2$

2

$$\Delta t = \frac{\Delta d}{v_a} = \frac{1}{v_a} \ell \frac{v_a}{v} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{\ell}{v}}$$

Conclusion : $(\Delta t)' > \Delta t$ et $(\Delta d)' < \Delta d$

Le chemin le plus court en distance est le plus long en temps.

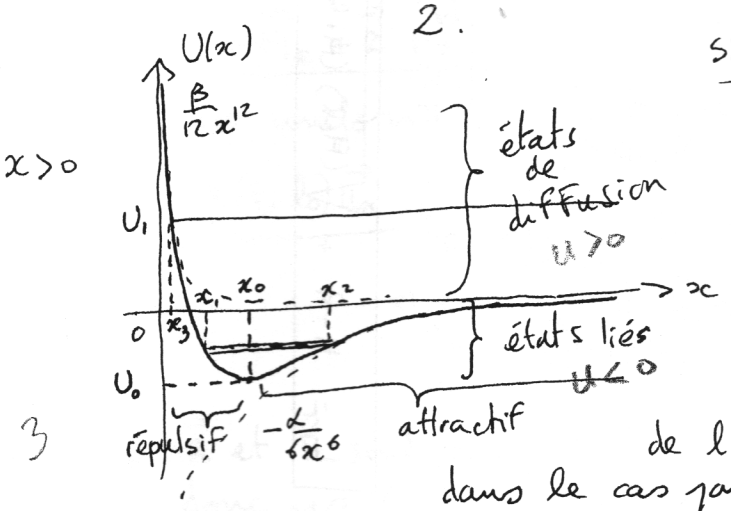


Rmq : il y aurait d'autres cas à traiter : • si $v < V$
• si on remonte le courant, c'est encore plus long en temps ! ($v > V$)

Atomes (corrigé) 1. $\vec{F} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow F_x \vec{u_x} = -\frac{dU}{dx}\vec{u_x}$

3 $\Rightarrow \frac{dU}{dx} = \frac{\alpha}{x^7} - \frac{\beta}{x^{13}} \Rightarrow \boxed{U(x) = -\frac{\alpha}{6x^6} + \frac{\beta}{12x^{12}}} + \underbrace{cste}_{\to 0}$ car $U(\infty) = 0$

2.



Si $E_m = E_c + U = U_0$: distance entre les deux noyaux constante ($= x_0$) (mvt circulaire par exemple)

Si $U_0 \leq E_m < 0$: mvt périodique en x_1 et x_2, mvt borné.

Si $E_m = U_1$: la particule vient de l'∞ arrive en x_3 et repart à l'∞. dans le cas particulier où $E_m = 0$ la vitesse à l'∞ est nulle.

3

$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{éq} = 0$ soit $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -\frac{\alpha}{x_0^7} + \frac{\beta}{x_0^{13}} = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/6}}$

2

3. $E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x)$ $\quad \frac{dE_m}{dt} = 0 = m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dU}{dx}$

$\left(\frac{dU}{dx}\right)(x = x_0 + \varepsilon) = \underbrace{\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x_0}}_{0} + \varepsilon\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} + \dots$ $\quad \ddot{x} \simeq \ddot{\varepsilon}$

$\Rightarrow m\ddot{\varepsilon} + \varepsilon\left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} = 0$ $\quad \left(\frac{d^2U}{dx^2}\right)_{x_0} = -7\frac{\alpha}{x_0^8} + 13\frac{\beta}{x_0^{14}}$

4

$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{13\beta/x_0^{14} - 7\alpha/x_0^8}{m}}}$

4. Il faut sortir de l'état lié, pour avoir $E_m \geq 0$: état de diffusion

$\Delta E_m = E_m(x \to \infty) - E_m(x_0)$

$E_{diss} = \Delta E_m = 0 + \frac{\alpha}{6x_0^6} - \frac{\beta}{12x_0^{12}} = \frac{1}{x_0^6}\left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{12x_0^6}\right) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{12}\frac{\alpha}{\beta}\right)$

3

$\Rightarrow \boxed{E_{diss} = \frac{\alpha^2}{12\beta}}$

19

Exercice : le skieur

1 1 - voir le cours

2 - On applique le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B' pour le système constitué par le skieur :

$$\frac{1}{2} m v_{B'}^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{\vec{P}}(A \to B')$$
$$= \int_A^{B'} m\vec{g} \cdot d\vec{r}$$
$$= E_p(A) - E_p(B')$$

3 avec $E_p = mgz$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cancel{m} v_{B'}^2 = \cancel{m} g H \quad ; \quad \boxed{v_{B'} = \sqrt{2gH}}$$

De la même façon on trouve pour la vitesse v_C :

$$\boxed{v_C = \sqrt{2g(H-h)}}$$

3 - voir le TD : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v} + m\vec{g}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{K} \exp\left(-\frac{kt}{m}\right) + \frac{\vec{g}m}{k}$$

en prenant l'instant $t=0$ comme étant le temps auquel le skieur atteint le point C, on trouve :

$$\vec{v}_C = \vec{K} + \frac{m\vec{g}}{k} \Rightarrow \vec{v} = \frac{m\vec{g}}{k} + \left(\vec{v}_C - \frac{m\vec{g}}{k}\right)\exp\left(-\frac{kt}{m}\right)$$

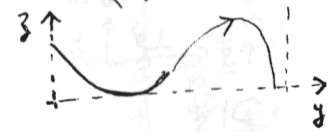
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{OM} = \frac{m\vec{g}}{k}t + \left(\vec{v}_C - \frac{m\vec{g}}{k}\right)\left(-\frac{m}{k}\right)\exp\left(-\frac{kt}{m}\right) + \vec{K}'$$

à $t=0$ $\vec{OM} = \vec{r}_C \Rightarrow \vec{K}' = \vec{r}_C + \frac{m}{k}\left(\vec{v}_C - \frac{m\vec{g}}{k}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_C + \frac{m\vec{g}t}{k} + \frac{m}{k}\left(\vec{v}_C - \frac{m\vec{g}}{k}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right]}$$

8

$$\Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_C \\ y(t) = y_C + \frac{m}{k}\sqrt{g(H-h)}\left(1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right) \\ z(t) = z_C - \frac{mgt}{k} + \frac{m}{k}\left(\sqrt{g(H-h)} + \frac{mg}{k}\right)\left(1 - \exp\left(-\frac{kt}{m}\right)\right) \end{cases}$$



4 - On néglige la résistance de l'air

$$\begin{cases} x(t) = x_C \\ y(t) = y_C + \sqrt{g(H-h)}\, t \\ z(t) = z_C + \sqrt{g(H-h)}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

on cherche le point tel que $z = z_C - h$

$$\Rightarrow \cancel{z_C} - h = \cancel{z_C} + \sqrt{g(H-h)}\, t_L - \frac{1}{2} g t_L^2$$

$$g t_L^2 - 2\sqrt{g(H-h)}\, t_L - 2h = 0$$

$$\Rightarrow t_L = \frac{\sqrt{g(H-h)}}{g} + \frac{1}{g}\left[g(H-h) + 2hg\right]^{1/2}$$

$$\boxed{t_L = \sqrt{\frac{H-h}{g}} + \sqrt{\frac{H+h}{g}}}$$

6

$$L = y(t_L) - y_C = \sqrt{g(H-h)}\, t_L$$

$$\Rightarrow \boxed{L = H - h + \sqrt{(H-h)(H+h)}}$$

52 Mouvement sur une glissière tournante (corrigé) :

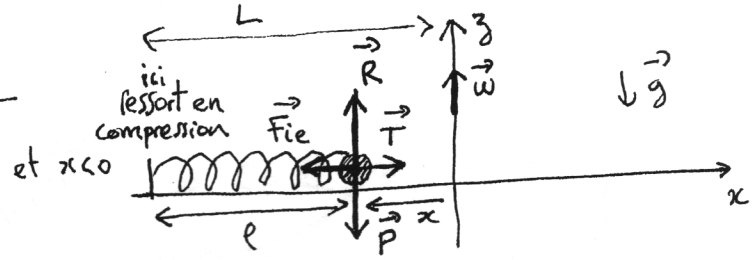
I. 1-a. le référentiel est non galiléen. A l'équilibre : $\vec{T}+\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}_{ie}+\vec{F}_{ic}=0$

3 $\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c$; $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\wedge\vec{v}$; $\vec{v}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{F}_{ic}=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{T}+\vec{F}_{ie}+\vec{R}+\vec{P}=\vec{0}}$ $\qquad \vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$

rotation uniforme : $\vec{a}_e = -\omega^2\vec{OM}$ $\qquad \vec{F}_{ie} = m\omega^2\vec{OM}$

$\vec{T} = -k(l-l_0)\vec{u}_x$



3

b - * $\vec{R}$ et $\vec{P}$ sont des forces $\perp$ au déplacement et ne travail donc pas ($\delta W = \vec{F}.d\vec{l}$).

* $\vec{F}_{ie}$ et $\vec{T}$ sont des forces conservatives qui dérivent d'une énergie potentielle :

$\vec{T} \longrightarrow E_{P_{élastique}} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$; $L = l - x$

$\vec{F}_{ie} \longrightarrow E_{P_{inertie}} = -\frac{1}{2}m\omega^2x^2$

en effet : $\vec{F}_{ie} = -\vec{\nabla}E_{P_i} = -\frac{d}{dx}E_{P_i}\vec{u}_x = m\omega^2x\vec{u}_x$

5 $\Rightarrow$ $\frac{dE_{P_i}}{dx} = -m\omega^2x$ ...

$\Rightarrow$ $\boxed{E_P = \frac{1}{2}k(L+x-l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2}$

c - $\frac{dE_P}{dx} = k(L+x-l_0) - m\omega^2x$ à l'éq : $\left(\frac{dE_P}{dx}\right)_{éq} = 0$

1 $\Rightarrow$ $k(L-l_0+x_{éq}) - m\omega^2x_{éq} = 0$

$\Rightarrow$ $x_{éq}(k-m\omega^2) = -k(L-l_0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{x_{éq} = -\frac{L-l_0}{1-\frac{m}{k}\omega^2}}$

2

d - Stable si $\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{éq} > 0$

1

or $\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{éq} = k - m\omega^2$

2

on pose : $\omega_{lim} = \sqrt{\frac{k}{m}}$

1

$\begin{cases} \text{si } \omega < \sqrt{\frac{k}{m}} & \text{éq. Stable} \\ \text{si } \omega > \sqrt{\frac{k}{m}} & \text{éq. Instable} \end{cases}$

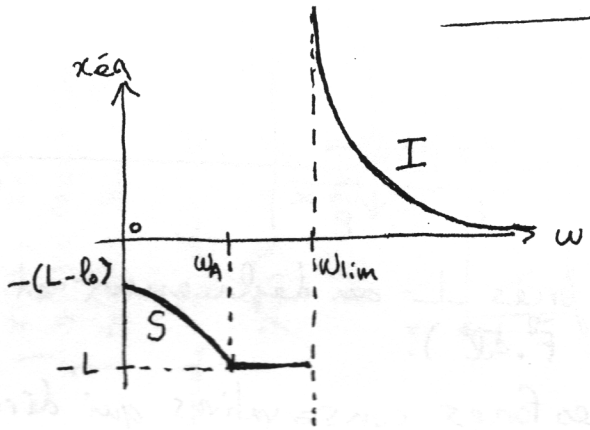
2 - a. M en A $\Rightarrow \ell = 0 \Rightarrow L = -x$

Premier contact : $x_{éq}$ en A , $-L = -\dfrac{L-\ell_0}{1-\frac{m}{k}\omega_A^2}$

$\Rightarrow 1-\frac{m}{k}\omega_A^2 = \dfrac{L-\ell_0}{L}$

3 $\Rightarrow \omega_A^2 = \frac{k}{m}\left(1-\frac{L-\ell_0}{L}\right) \Rightarrow \underline{\omega_A = \sqrt{\frac{k}{m}\,\frac{\ell_0}{L}}} < \omega_{lim}$

b.



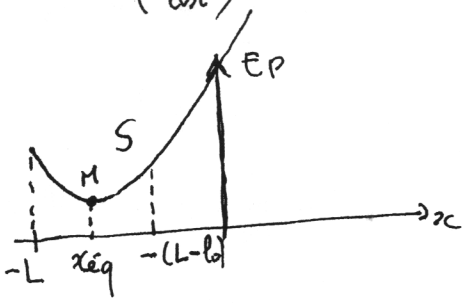
Pas d'équilibre pour $x \in \,]-(L-\ell_0), 0]$

4

c. si $\omega < \omega_{lim}$, $\left(\dfrac{d^2E_p}{dx^2}\right) > 0 \Rightarrow$ puit de potentiel

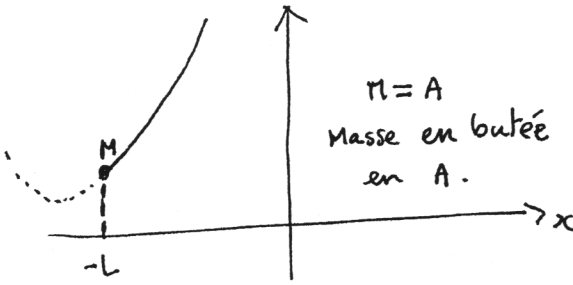
si $0<\omega<\omega_A$:

$x_{éq} < 0$



6

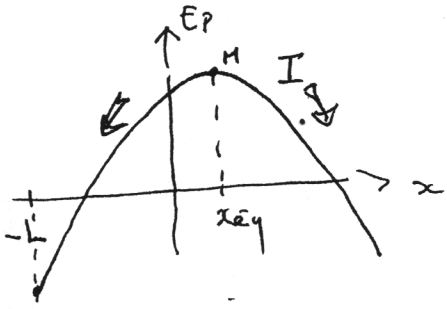
si $\omega_A < \omega < \omega_{lim}$:



M = A
Masse en butée en A.

si $\omega > \omega_{lim}$:

$x_{éq} > 0$



d. • pour $\omega = 0$: $\ell = \ell_0$ ressort au repos
• quand $\omega \nearrow$ le ressort est progressivement comprimé, sa longueur diminue, jusqu'à s'annulée pour $\omega = \omega_A$.
• La masse reste ensuite en butée en A quand $\omega \to +\infty$.

3

e. La masse est sur une position d'équilibre instable, suite à une perturbation dx la masse quitte cette position ; si $dx > 0$ la masse part vers x infini, $\ell \to +\infty$, et le ressort casse.
si $dx < 0$, $x \searrow$ et la masse vient se bloquer en A.

3

3- pour $\omega \in [0, \omega_A[$: $E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x)$

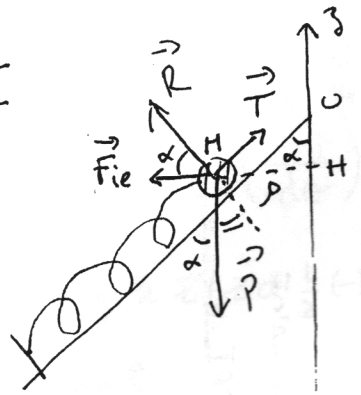
$\frac{dE_m}{dt} = 0$ (en absence de frottement) $\Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\frac{dE_p}{dx} = 0$

$\ldots \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{(d^2E_p/dx^2)_{éq}}{m}\varepsilon = 0$; $\ddot{\varepsilon} + \Omega^2 \varepsilon = 0$

$x = x_{éq} + \varepsilon$ $\Rightarrow \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}}$

4 $x(t) = x_{éq} + \varepsilon_M \cos(\Omega t + \varphi)$

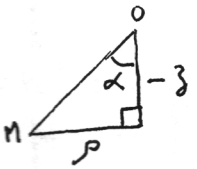
14/ II



1. $\rho = HM$. $E_p = E_{p_{el.}} + E_{p_{in.}} + E_{p_{pes.}}$

$\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + mgz$

$z = -OH$



$\cos\alpha = -z/OM$

$\Rightarrow OM = -z/\cos\alpha$

$l + MO = L$

$\Rightarrow l = L - MO$ $\sin\alpha = \frac{\rho}{OM}$ $\Rightarrow l = L - \rho/\sin\alpha$

$\boxed{E_p(l) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\sin^2\alpha(L - l)^2 - mg\cos\alpha(L - l)}$ $\frac{\rho}{\sin\alpha} = L - l = OM$

$\frac{dE_p}{dl} = k(l - l_0) + m\omega^2\sin^2\alpha(L - l) + mg\cos\alpha$

$\Rightarrow l_{éq}(k - m\omega^2\sin^2\alpha) = kl_0 - mg\cos\alpha - m\omega^2\sin^2\alpha\, L$

7 $\Rightarrow \boxed{l_{éq} = \frac{kl_0 - mg\cos\alpha - m\omega^2\sin^2\alpha\, L}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}}$

2. $\frac{d^2E_p}{dl^2} = k - m\omega^2\sin^2\alpha$ $\Rightarrow \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2\sin^2\alpha}}$

2 stable si : $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}/\sin\alpha$

3. selon $\vec{R}$, appliquons la condition d'éq. $\vec{R} + \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}ie = \vec{0}$:

$R + \cos\alpha\,|Fie| - \sin\alpha\,|P| = 0$

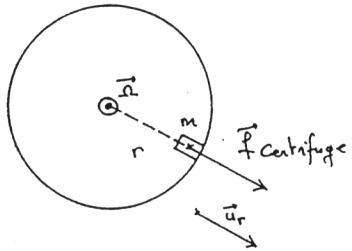
La masse décolle quand $R = 0$: $|Fie|/|P| = \tan\alpha$

5 $\Rightarrow \frac{\cancel{m}\omega^2\rho}{\cancel{m}g} = \tan\alpha$ $\Rightarrow \omega_{déc.} = \frac{g\tan\alpha}{\rho_{éq}} = \frac{g}{\cos\alpha(L - l_{éq})}$

Dans cet exemple, les objets situés dans le vaisseau sont soumis à la force centrifuge qui est radiale et les plaque contre la paroie extérieure.

1.1. Référentiel de la cabine
1.2. R' en rotation uniforme par rapport à R : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$

$$\vec{f}_{centrifuge} = -m\vec{\Omega}\wedge[\vec{\Omega}\wedge\vec{O'M}] = m\Omega^2 r.\vec{u_r}$$



Cette force est proportionnelle à la masse et peut donc être assimilée à un poids :

$$\vec{f}_{cent} = m(\Omega^2 r\vec{u_r}) \simeq m\vec{g_A}$$

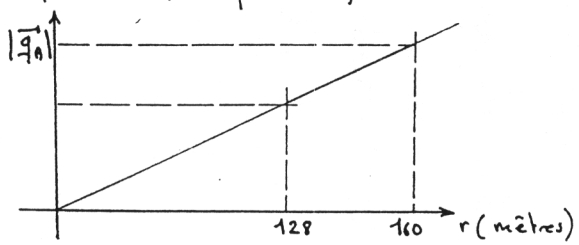
Elle est dûe à un effet inertiel et non gravitationnel, on ne peut donc pas parler de champ gravitationnel artificiel. (il y a des similitudes et des différences ...)

II.1.3 Par identification $\vec{g_A} = \Omega^2 r\,\vec{u_r}$ soit $\Omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{10}{160}} = \frac{1}{4}$

$\boxed{\Omega = 0{,}25 \text{ rad.s}^{-1}}$ $\quad \Omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\Omega}$ $\quad T = 8\pi$ s

$\boxed{T \simeq 25{,}2 \text{ secondes}}$

II.1.4 $\vec{g_A} = \Omega^2 r.\vec{u_r}$ Ce champ est à symetrie cylindrique, il est radial et dirigé vers l'extérieur et décroit en +∞. Il n'est pas uniforme.



$$\frac{\Delta g_A}{g_A} = \frac{g_A(160) - g_A(128)}{g_A\left(\frac{128+160}{2}\right)}$$

$$\frac{\Delta g_A}{g_A} \simeq 0{,}22$$

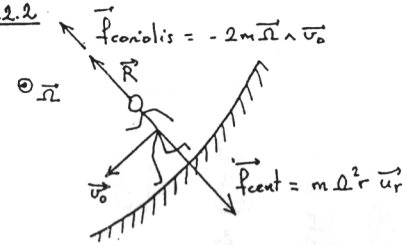
(La variation relative est comprise entre 0,2 ou 0,25 selon le point pour lequel on la calcule)

II.1.5 Un individu immobile dans l'appareil ne se rend pas compte du caractère artificiel de son poids

II.2/ Mouvements à bord du vaisseau

II.2.1 Le cosmonaute est mobile dans un référentiel tournant. Il subit donc une accélération complementaire (de coriolis)

II.2.2



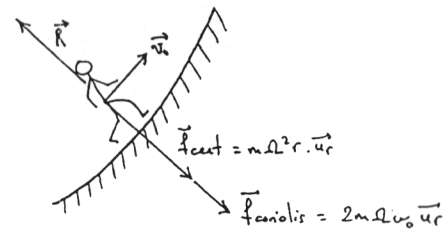
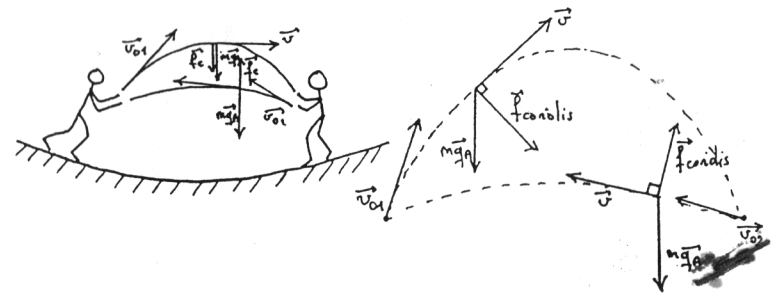
* $\vec{f}_{cent} = m\Omega^2 r\vec{u_r} = m\vec{g_A}$
* $\vec{R}$ réaction (opposée aux deux autre
* $\vec{f}_{coriolis} = -2m\Omega v_0\,\vec{u_r}$ (car $\vec{v_0} = -v_0\vec{u_r}$

La force de coriolis, proportionnelle à la vitesse, diminue le "poids" du cosmonaute. Cet effet n'est pas perceptible pour un coureur dans le champ de pesanteur terrestre.

II.2.3 Si le cosmonaute accelère, la force de coriolis augmente et le coureur est de plus en plus "soulevé". Son poids diminue avec v_0.

II.2.4 Lorsque le cosmonaute change de sens, l'effet change également et le cosmonaute pèse plus lourd.

$\vec{v_0} = +v_0.\vec{u_\theta} \Rightarrow \vec{f}_{coriolis} = 2m\Omega v_0\,\vec{u_r}$



III.2.5 Pour les mêmes raisons, le cosmonaute de gauche doit viser plus haut et celui de droite doit viser plus bas