

## Devoir de Physique

## A - Electrostatique

I - Soit le champ électrique suivant :

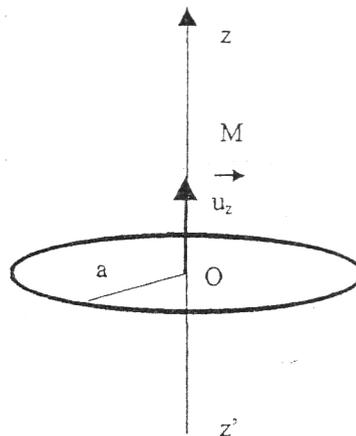
$$\vec{E} = \frac{U_0}{d} (x\vec{u}_x - y\vec{u}_y) ; U_0 \text{ et } d \text{ sont des constantes positives.}$$

- 1 - Déterminer les équations des lignes de champ.
- 2 - Tracer l'allure de ces lignes dans le plan (Oxy).

## II

## - Spire chargée uniformément

On considère une spire de rayon  $a$ , de centre  $O$ , d'axe  $z'z$  (de vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ ). Cette spire est uniformément chargée de densité linéique  $\lambda$ .



1. Calculer la charge totale  $Q$  de la spire. AN:  $R=5\text{cm}$ ;  $\lambda=10^{-8}\text{Cm}^{-1}$ .
2. Soit  $M$  un point de l'axe repéré par sa coordonnée  $z$ .
  - a) Déterminer la direction du champ électrostatique créé par la spire au point  $M$  en utilisant des considérations de symétrie.
  - b) Déterminer complètement le champ en  $M$  en fonction de la cote  $z$  et des données. Déterminer les coordonnées  $z_1$  et  $z_2$  des points  $P_1$  et  $P_2$  où le module du champ est extrémum. Donner l'allure de la courbe de variation du module du champ en fonction de  $z$ .
  - c) Déterminer le potentiel électrostatique  $V(z)$  créé par la spire au point  $M$  par un calcul direct. Retrouver ce résultat en utilisant l'expression du champ électrostatique déterminée dans la question précédente.

On fera le choix du potentiel absolu (potentiel nul à une distance infinie de la source).

Calculer numériquement le potentiel  $V(0)$  au point  $O$ .

3. Une particule de charge négative «  $-q$  » (avec  $q>0$ ), de masse  $m$ , est lancée de l'infini sur l'axe  $z'z$  sans vitesse initiale. Quelle sera la vitesse  $v$  de la particule lorsqu'elle traverse le plan de la spire?

AN:  $q = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{C}$ ;  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{kg}$

Capacité d'un condensateur sphérique

Mais avons un condensateur constitué de deux armatures sphériques concentriques.

L'armature sphérique, la plus petite, centrale, a un rayon  $R_0$ , une densité surfacique de charges  $\sigma$  et est portée au potentiel  $V$ .

L'armature extérieure de rayon  $R$  et de densité  $\sigma$  est mise à la masse.

Les armatures portent des charges nettes  $+Q$  et  $-Q$ .

- 1) déterminer  $Q$  en fonction de  $\sigma$  et  $R_0$
- 2) Considérant la neutralité de l'ensemble trouvez la relation entre  $\sigma$  et  $\sigma_2$ .

Détermination du champ électrique  $\vec{E}$ :

- 3) Spécifier le système de coordonnées et expliquez les symétries.
  - 4) Choisissez la surface de Gauss, puis déterminez la flux à travers cette surface en fonction de  $\pi$  et  $E$ .
  - 5) Expression de  $\vec{E}$  dans les trois zones.
  - 6) Expression du potentiel électrique  $V$  en tous points.
  - 7) Définir la capacité  $C$  de ce condensateur.
  - 8) Calculer  $C$  en fonction de  $\epsilon_0, R_0$  et  $R$ .
- Vérifier l'homogénéité de la relation.

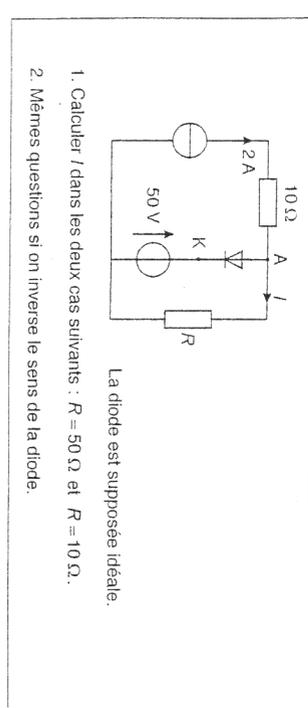
Application numérique :  $R_0 = 10 \text{ cm}$ ,  $R = 20 \text{ cm}$ ,  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ SI}$

12

B.

Électronique

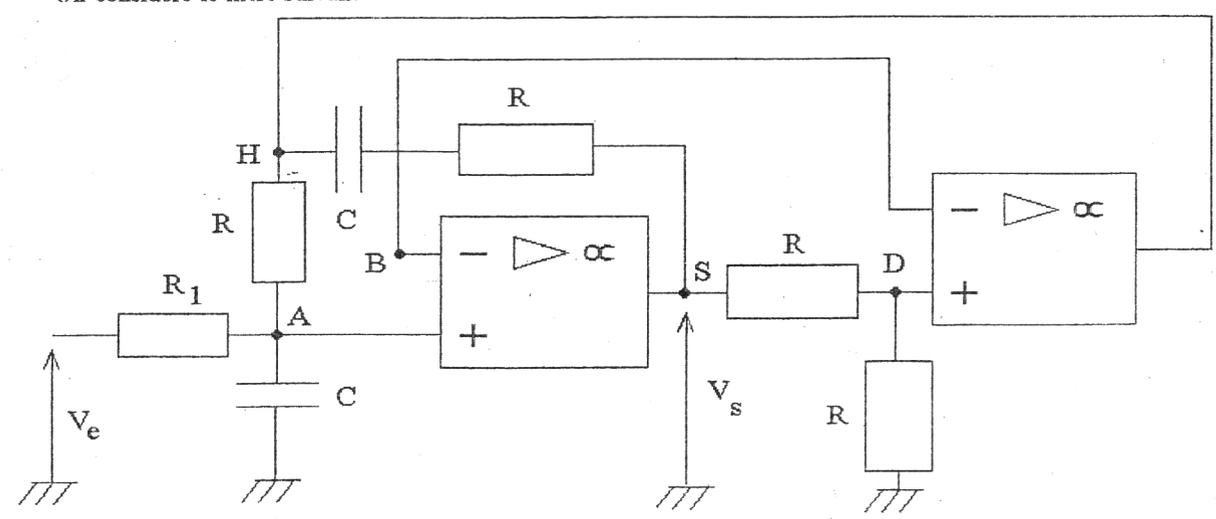
I Exercice : Étude d'un circuit



1. Calculer / dans les deux cas suivants :  $R = 50 \Omega$  et  $R = 10 \Omega$ .
2. Mêmes questions si on inverse le sens de la diode.

II Problème : Filtre du second ordre

On considère le filtre suivant



- 1- Ecrire la loi des noeuds en termes de potentiel aux points A, B, D.
- 2- Donner l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{V_s}{V_e}$ .
- 3- Mettre la fonction sous la forme canonique

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \quad \text{où } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

$H_0, \omega_0$  et  $Q$  sont des quantités que l'on déterminera à l'aide des données du problème.

- 4- Etudier les comportements asymptotiques de  $G_{dB}$  et  $\phi$  associés à  $\underline{H}$  pour  $Q \geq \frac{1}{2}$ .
- 5- Tracer les diagrammes asymptotiques et le diagramme de Bode du filtre étudié pour  $Q = 0,5$ .
- 6- Donner l'équation différentielle vérifiée par  $v_s(t)$ .

1. Etude du comparateur à hystérésis

On considère le montage de la figure 2.

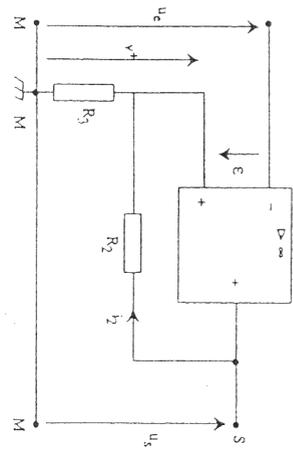


Fig. 2

- 1.1. Exprimer la tension  $v'$  en fonction de  $R_2$ ,  $R_3$  et  $u_e$ .
- 1.2. Etablir l'expression de la tension de seuil  $V_{H1}$  tension pour laquelle la tension de sortie bascule de  $+V_{sat}$  à  $-V_{sat}$ , et de la tension de seuil  $V_B$  tension pour laquelle la tension de sortie bascule de  $-V_{sat}$  à  $+V_{sat}$ .
- 1.3. Application numérique : On donne  $R_2 = R_3 = 10\text{ k}\Omega$ . Calculer  $V_H$  et  $V_B$ .
- 1.4. Tracer la caractéristique de transfert  $u_s$  en fonction de  $u_e$  lorsque  $u_e$  varie de  $-10\text{ V}$  à  $+10\text{ V}$  et flécher le sens de parcours.

1-2. Etude du montage complet (figure 3). On conserve  $R_2 = R_3$ .

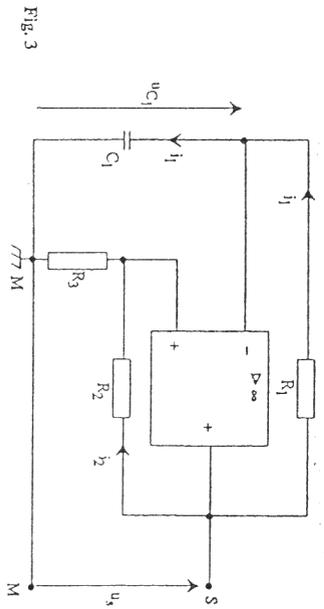


Fig. 3

- 2.1. A l'instant initial  $t = 0$ , le condensateur  $C_1$  est déchargé, et on suppose que  $u_s = +V_{sat}$ . Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $u_{C1}(t)$ , et en déduire l'expression littérale de  $u_{C1}(t)$  en fonction des éléments du montage.
- 2.2. Montrer qu'à un instant  $t_0$  que l'on définira, la tension  $u_s$  bascule.
- 2.3. Pour  $t > t_0$  et tant que la tension  $u_s$  reste à  $-V_{sat}$ , quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $u_{C1}(t)$ ? En déduire l'expression littérale de  $u_{C1}(t)$  en fonction des éléments du montage.
- 2.4. Montrer qu'à un instant  $t_0 + \Delta t_1$ , la tension  $u_s$  bascule. Expliciter  $\Delta t_1$  en fonction des éléments du montage.

2.5. On donne le chronogramme  $u_{C1}(t)$  (figure 4) : A partir de l'instant  $t_0$ , la tension  $u_{C1}$  est périodique de période  $T$ . Expliciter brièvement pourquoi les durées  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$  sont identiques et déduire l'expression de la période  $T$  en fonction des éléments du montage.

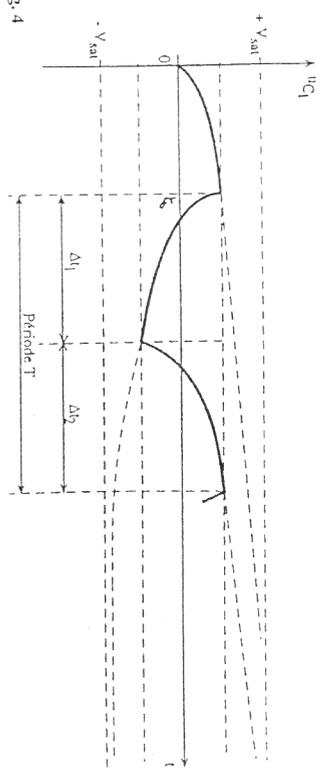


Fig. 4

2.6. Représenter le chronogramme  $u_s(t)$ , tension de sortie du montage de la figure 3, en concordance de temps avec  $u_{C1}(t)$

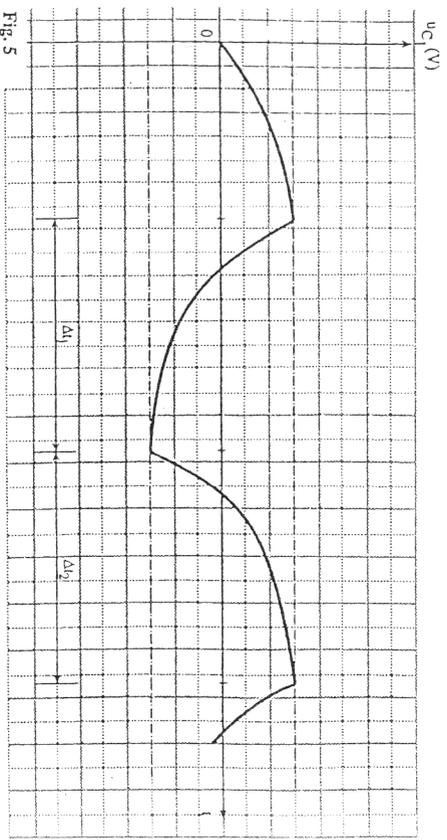


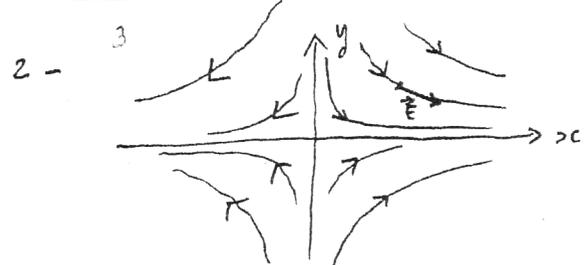
Fig. 5

2.7. Calculer le rapport cyclique défini par  $\eta = \frac{\text{durée de l'état haut de } u_s}{\text{période } T}$  de  $u_s$

A. Electrostatique I.1 -  $E_x = \frac{U_0}{d} x$ ;  $E_y = -\frac{U_0}{d} y$ ; lignes de champ telles que  $\vec{E} \wedge d\vec{r} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E_x dy = E_y dx \Rightarrow x dy = -y dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln y = -\ln x + \text{cte} \Rightarrow y = C/x \quad C: \text{constante } \mathbb{R}$$



B I  
Étude d'un circuit:  
résolution n°1:

12

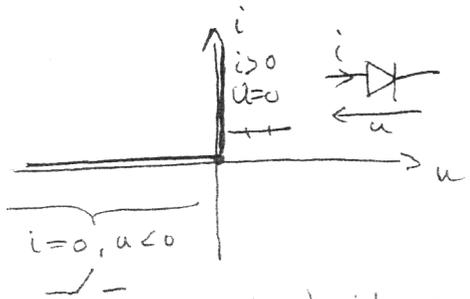
outil informatique

1. On se place dans le cas où  $R = 50 \Omega$ . L'intensité maximale qui peut traverser  $R$  est  $I = 2 \text{ A}$ . La tension aux bornes de  $R$  vaut alors  $U_R = 100 \text{ V}$ . Dans ce cas :  $U_A > U_K$  et la diode est passante. La tension aux bornes de  $R$  est alors fixée par la source de tension de  $50 \text{ V}$ . L'intensité du courant que traverse  $R$  vaut  $I = 1 \text{ A}$ .

Si  $R = 10 \Omega$  le même raisonnement conduit à  $U_{R_{\max}} = 20 \text{ V}$ , dans ce cas  $U_A < U_K$  la diode est non passante et  $I = 2 \text{ A}$ .

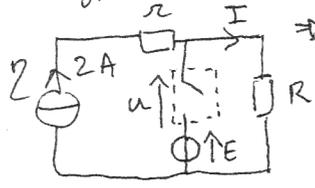
2. Un raisonnement analogue conduit à :  $I = 2 \text{ A}$  pour  $R = 50 \Omega$ ,  $I = 5 \text{ A}$  pour  $R = 10 \Omega$ .

résolution n°2: caractéristique d'une diode parfaite :



outil stylo / Réflexion: L'outil donne t-il un sens à ce que l'on fait ?

1. hypothèse diode bloquée :



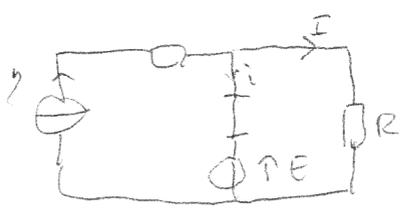
$\Rightarrow I = i = 2 \text{ A}$   
hypothèse valide?  
déterminat° de u:  
 $u + E - RI = 0$

$\Rightarrow u = RI - E$

AN:  $R = 10 \Omega$ :  $u = 10 \times 2 - 50 = -30 \text{ V}$  OK

on a bien  $I = 2 \text{ A}$  pour  $R = 10 \Omega$

AN  $R = 50 \Omega$ :  $u = 50 \times 2 - 50 = 50 \text{ V} > 0 \Rightarrow$  hyp. invalidée  
 $\Rightarrow$  la diode est passante :  $\Rightarrow E = RI$



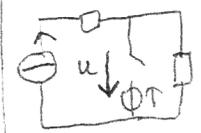
$\Rightarrow I = \frac{E}{R}$

AN:  $I = \frac{50}{50}$

$\Rightarrow I = 1 \text{ A}$  pour  $R = 50 \Omega$

vérifcat:  $i = I \Rightarrow i = 2 - 1 = 1 \text{ A} > 0$  OK

2. hyp. diode bloquée :



$I = 2 \text{ A}$   
 $u = E - RI$

AN  $R = 50 \Omega$ :  $u = -50 \text{ V} < 0$   
hypothèse validée:

$I = 2 \text{ A}$  pour  $R = 50 \Omega$

AN  $R = 10 \Omega$ :  $u = 30 \text{ V} > 0 \Rightarrow$  hyp. invalidée  
 $\Rightarrow$  diode passante.

$\Rightarrow E = RI \Rightarrow I = E/R$

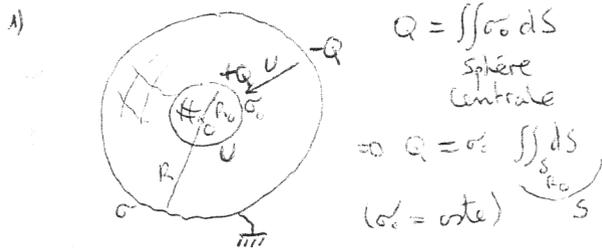
AN:  $I = \frac{50}{10} = 5 \text{ A}$

$I = 5 \text{ A}$  pour  $R = 10 \Omega$

vérifcat:  $i = I - 2 = 5 - 2 = 3 \text{ A} > 0$



Capacité d'un condensateur sphérique: 52



$$Q = \iint_{\text{sphère centrale}} \sigma_0 dS$$

$$\Rightarrow Q = \sigma_0 \iint_{S_{\sigma_0}} dS$$

( $\sigma_0 = \text{cte}$ )

$+Q - Q$   $Q = CU \Rightarrow Q = \sigma_0 4\pi R_0^2$

$U > 0$   
 $Q > 0$

$$\Rightarrow \sigma_0 = \frac{Q}{4\pi R_0^2}$$

$$2) Q_{\text{tot}} = 0 = +Q - Q$$

$$3) -Q = \iint_{\text{sphère ext.}} \sigma dS = - \iint_{\text{sphère centrale}} \sigma_0 dS$$

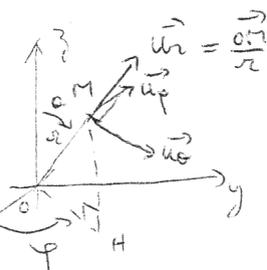
$$\Rightarrow \sigma 4\pi R^2 = -\sigma_0 4\pi R_0^2$$

$$\Rightarrow \sigma = -\sigma_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^2$$

$\sigma_0 > 0$  ;  $\sigma < 0$  et  $\sigma_0 > \sigma$

3) Nous nous plaçons en coordonnées sphériques  $r(\rho, \theta, \varphi)$ :

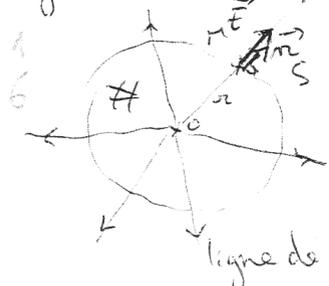
$\rho = \overline{OM} = \|\overrightarrow{OM}\| > 0$   $\rho \in [0, +\infty[$   
 $\theta = (\overline{Oz}, \overline{OM})$   $\theta \in [0, \pi]$  ;  $\varphi = (\overline{OM}, \overline{Ox})$   $\varphi \in [0, 2\pi[$



$\{P_s\}$  tous les plans qui contiennent la droite  $(OM)$  sont plans de symétrie de la distribution de charges :  $\begin{cases} \vec{E} \in P_s \\ \vec{E} \in P_s' \end{cases} \Rightarrow \vec{E} \in P_s \cap P_s' \Rightarrow \vec{E} \text{ selon } (OM) \Rightarrow \vec{E} = E \vec{u}_r$

De plus, invariance par rotation selon  $\theta$  et  $\varphi$  : d'où  $\vec{E} = E(\rho) \vec{u}_r$

4) Nous prenons une sphère de Gauss concentrique aux 2 de la distribution de charges ainsi la normale sortante est constamment selon  $\vec{E}$  et le calcul du flux est simple :



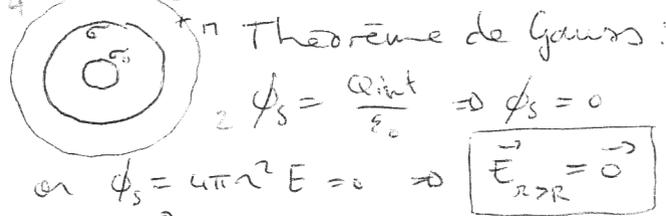
$$\phi_s = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S E(\rho) \vec{u}_r \cdot d\vec{S} \vec{u}_r$$

$\vec{n} = \vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 1$

$$\Rightarrow \phi_s = E(\rho) \iint_S dS$$

$$\Rightarrow \phi_s = E S = 4\pi r^2 E$$

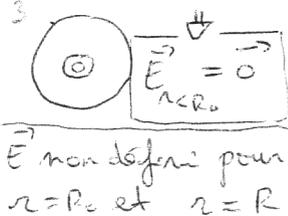
5)  $r > R$  :  $Q_{\text{int}} = Q_{\text{ext}} = +Q - Q = 0$



Theorème de Gauss :  $\phi_s = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow \phi_s = 0$

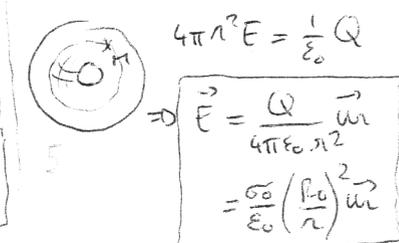
ou  $\phi_s = 4\pi r^2 E = 0 \Rightarrow \vec{E}_{r > R} = \vec{0}$

$r < R_0$  :  $Q_{\text{int}} = 0$



$\vec{E}$  non défini pour  $r = R_0$  et  $r = R$

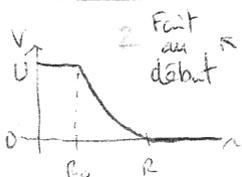
$R_0 < r < R$  :  $Q_{\text{int}} = +Q$



$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \vec{u}_r$$

6)  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$   
 $\Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}$ ,  $V$  continue



7)  $U = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right) = \frac{Q}{C}$

8)  $C = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \frac{91}{1 - 45} = \frac{92}{9} \cdot 10^{-9} \text{ F}$

$r < R_0$  :  $V = C_1 = U$   
 $R_0 < r < R$  :  $V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r} + C_2$   
 $r > R$  :  $V = C_3 = 0 = V(r \rightarrow R)$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{1}{\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}}$

$$\Rightarrow C = 4\pi \epsilon_0 \frac{R_0}{1 - R_0/R}$$

$C = 22 \text{ pF}$

$1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F} = 10^3 \text{ nF}$

$[4\pi \epsilon_0] = \frac{[E][Q]}{[V][m]} = \frac{C}{V \cdot m} = C \cdot V^{-1} \cdot m^{-1}$

$F = \frac{C}{V} = \frac{C}{V \cdot m} \frac{m}{\text{unité}}$



$$U_T = \frac{R_3 u_3}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_2} V_{sat}$$

I-1.1. D'après le théorème de Millman :  $U_T = \frac{R_3 u_3}{R_2 + R_3} + \frac{1}{R_2} V_{sat}$  puisque l'entrée (-) n'est pas bouclée sur la sortie.  $u_3$  prend donc les valeurs  $\pm V_{sat}$ .

\* Si  $u_3 = V_{sat}$  alors on a  $U_T - U_- > 0$  c'est  $u_2 < \frac{R_3 V_{sat}}{R_2 + R_3}$

$u_3$  reste à  $V_{sat}$  tant que  $u_3$  reste inférieure à  $U_H = \frac{R_3 V_{sat}}{R_2 + R_3}$

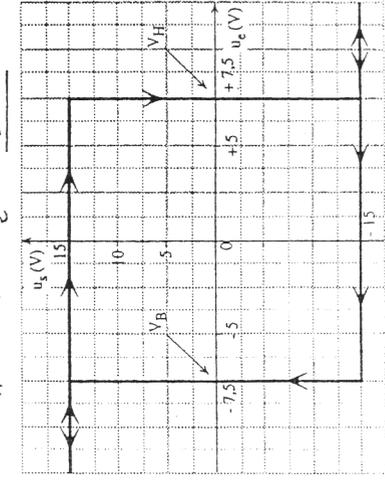
Si  $u_2$  coïte et passe par cette valeur il y a basculement et la sortie à  $-V_{sat}$

\* Si  $u_3 = -V_{sat}$  alors on a  $U_T - U_- < 0$  c'est  $u_2 > \frac{-R_3 V_{sat}}{R_2 + R_3}$

$u_3$  reste à  $-V_{sat}$  tant que  $u_2$  reste supérieur à  $U_B = \frac{-R_3 V_{sat}}{R_2 + R_3}$

Si  $u_2$  décroît et passe par cette valeur il y a basculement de  $u_3$  de  $-V_{sat}$  à  $V_{sat}$

1.3. Si  $R_2 = R_3$   $U_H = -U_B = \frac{V_{sat}}{2} = 7,5V$



I-2.1 la tension aux bornes du condensateur ne peut pas subir de discontinuité.

Au départ  $u_2$  va donc évoluer à partir de 0V. La sortie  $u_3$  de l'A.O restera à  $+V_{sat}$  tant que  $u_2$  restera inférieure au seuil  $U_H$ .

Une loi de maille donne  $u_3 = u_2 + R_2 i_1$  avec  $i_1 = C_1 \frac{du_2}{dt}$

$$R_1 C_1 \frac{du_2}{dt} + u_2 = V_{sat}$$

$u_2 = u_{part}(t) + u_{part}(t) = V_{sat} + d e^{-t/R_1 C_1}$  (puisque  $u_3 = V_{sat}$  pour l'instant).

$$u_2(0) = V_{sat} (1 - e^{-t/R_1 C_1})$$

puisque  $u_2(0) = 0$ , on a  $d = -V_{sat}$

I.2.2.  $u_3$  bascule lorsque  $u_2$  franchit le seuil  $U_H$ . à l'instant  $t_0$  tel que  $u_2 = U_H$  c'est  $V_{sat} (1 - e^{-t_0/R_1 C_1}) = U_H$ .

2.3. D'après la loi de maille écrite au I.2.1, avec maintenant  $u_3 = -V_{sat}$ , l'équation diff. est :

$$R_1 C_1 \frac{du_2}{dt} + u_2 = -V_{sat}$$

on a donc  $u_2 = -V_{sat} + \mu e^{-t/R_1 C_1}$

Puisque  $u_2(t_0) = U_H = \frac{V_{sat}}{2}$ , il vient :  $\frac{V_{sat}}{2} = -V_{sat} + \mu e^{-t_0/R_1 C_1}$

$$\text{Soit } \mu = \frac{3}{2} V_{sat} e^{t_0/R_1 C_1} : u_2(t) = V_{sat} \left( -1 + \frac{3}{2} e^{-(t-t_0)/R_1 C_1} \right)$$

2.4. Pour  $t > t_0$ ,  $u_2$  décroît et tendrait vers  $-V_{sat}$ . lorsque  $u_2$  franchit la valeur  $V_B = -\frac{V_{sat}}{2}$ , il y a basculement de la sortie. Appelons  $t = t_0 + \Delta t_1$  l'instant correspondant : il s'écrit :

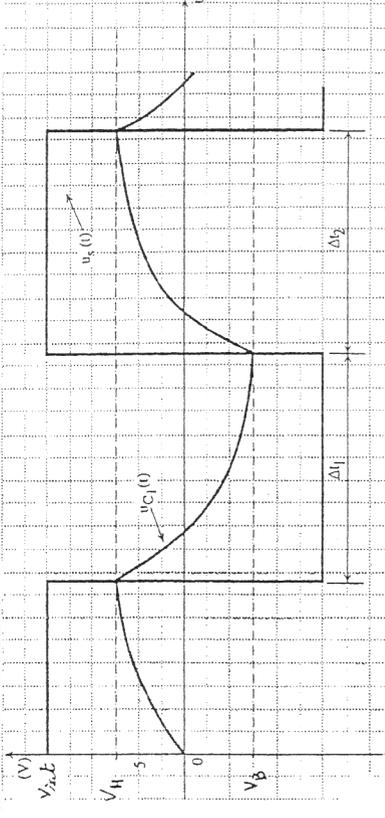
$$-\frac{V_{sat}}{2} = V_{sat} \left( -1 + \frac{3}{2} e^{-\Delta t_1/R_1 C_1} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{2} e^{-\Delta t_1/R_1 C_1}$$

$$\Leftrightarrow e^{\Delta t_1/R_1 C_1} = 3 \Leftrightarrow \Delta t_1 = R_1 C_1 \ln 3$$

2.5. Après l'instant  $t_0 + \Delta t_1$ ,  $u_3$  est dans l'état haut, on a à nouveau l'équation différentielle du I.2.1 avec  $u_2(t_0 + \Delta t_1) = V_B = -\frac{V_{sat}}{2}$ . le condensateur se charge donc à nouveau, nous la tension à l'équilibre.

Comme la charge et la décharge du condensateur se font à travers la même résistance  $R_1$  et que les seuils de basculement  $V_B$  et  $V_H$  sont symétriques, les durées  $\Delta t_1$  et  $\Delta t_2$  sont identiques et  $T = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2 \Delta t_1$

$$T = 2 R_1 C_1 \ln 3$$



2.7.  $\gamma = \frac{\Delta t_1}{T} = 0,5$