

Astronomie

La Terre et la Lune : La Terre et la Lune ne sont pas toujours à la même distance, $r_{\min} = 363300 \text{ km}$ et $r_{\max} = 405500 \text{ km}$.

a) Déterminez le demi-grand axe a de la trajectoire, son excentricité et la périodicité T en jours. Nous considérons que $M_T \gg M_L$.

b) Nous avons maintenant $M_T = 81 M_L$.

Sans aucun calcul, tracez l'allure des trajectoires pour a) puis b).

Données: $M_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
 $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m/kg}^2$

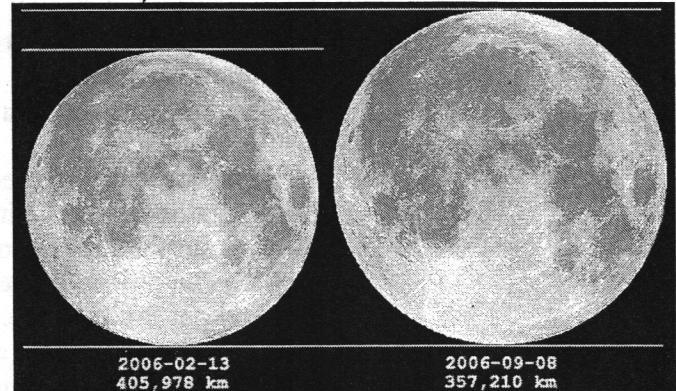
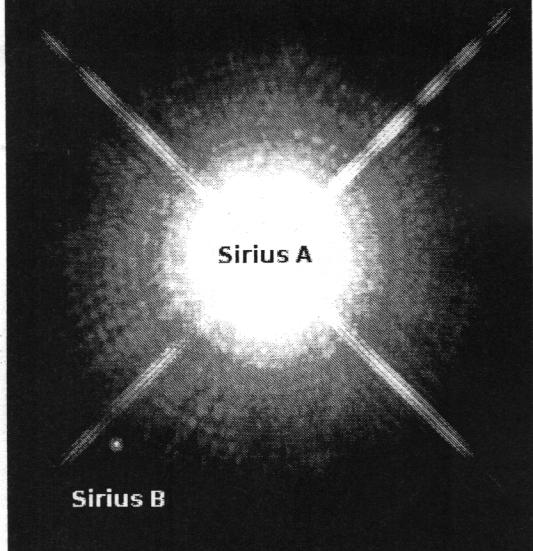


Photo prise par le Télescope spatial Hubble



Un système binaire : Sirius

Considérons Sirius, l'étoile la plus brillante vue depuis la Terre la nuit. Cette étoile est assez proche de nous : 8,6 a.l. (années lumineuses / comparé à l'étoile la plus proche, proxima du Centaure à 4,3 a.l., après le Soleil (!)).

En fait il s'agit d'un système double constitué de Sirius A, étoile de $m_A = 2,10$ masses solaires et de Sirius B, naine blanche de $m_B = 1,03 M_\odot$.

La distance entre Sirius A et B va de $d_{\min} = 8,1 \text{ u.a.}$ à $d_{\max} = 31,5 \text{ u.a.}$ et la périodicité du mouvement de l'une par rapport à l'autre est de 49,9 ans.

a) Considérez le $\mathcal{Y} = \{A, B\}$ isolé, comment pouvons-nous décrire le mouvement de A et B? Introduire la notion de particule fictive M et déterminer le demi-grand axe a pour M. Dessiner précisément sur un schéma l'allure des 3 trajectoires.

b) Montrez que l'excentricité s'écrit: $e = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{2a}$

c) Déterminer le demi-grand axe pour

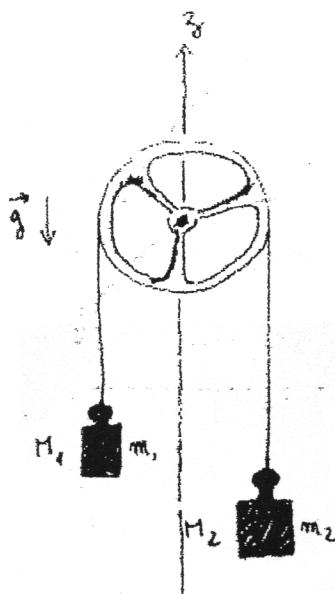
A et B (Expressions littérales EL, puis AN.). De même pour c, distance du centre à un foyer et b, demi-petit axe.

d) Si l'étoile sa masse constante, vaporise d'un coup la moitié de la masse de la naine blanche que deviendrait la période?

(Ce phénomène se produit en fait continuellement.)

u.a.: unité astronomique, distance Terre-Soleil ≈ 150 million de km. Mass du Soleil $\odot: 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

Poulie



Deux masses m_1 et m_2 sont reliées par un fil inextensible.

L'ensemble est placé sur une poulie d'axe horizontal fixe. La poulie et le fil sont de masse négligeable devant les masses.

- En utilisant le théorème du moment cinétique à l'ensemble $S = \{m\text{asses, fil, poulie}\}$ montrez que:

$$\ddot{z}_1 = g(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)$$

Quel mouvement effectuent les masses?

- Les deux masses sont initialement immobiles à la même hauteur.

Après combien de temps les masses seront distantes de d ?

- Déterminez l'accélération \ddot{z}_G du centre de masse du système.

Quel mouvement a-t-il?

- Nous suspendons un ressort de raideur k et longueur à vide l_0 .

Montrer que l'allongement Δl du ressort est proportionnel à la force F exercée pour l'étirer (principe du dynamomètre).

- Nous suspendons maintenant l'axe de la poulie à ce ressort:

- On maintient l'ensemble immobile. Quel est la force F mesurée par le dynamomètre?

Quelle est la masse de l'ensemble S ?

- Les masses sont maintenant en mouvement.

Quel est la force F mesurée par le dynamomètre (on utilisera le théorème du centre de masse)?

Quelle est la masse apparente de l'ensemble S ?

- AN: $m_1 = 1\text{kg}$, $m_2 = 2\text{kg}$.



Piston étanche: Nous considérons le dispositif suivant :

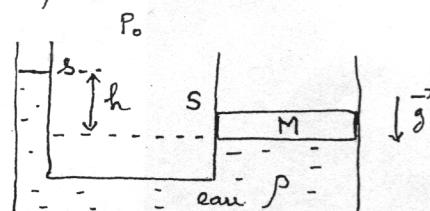
Nous posons un piston de masse M .

Déterminez la hauteur h à l'équilibre en fonction des données.

Application numérique :

$$S = 1 \text{ dm}^2, \rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{et } M = 1 \text{ kg.}$$



Quelle est l'influence de s sur h ?

Atmosphère isotherme avec champ de pesanteur variable:

- Rappelez le principe fondamental de la statique des fluides.
- Déterminez le champ de gravitation \vec{g} créé par la Terre en fonction de z , g_0 et R_T .
 z : altitude par rapport au sol.
 g_0 : champ de pesanteur au niveau du sol.
 R_T : rayon de la Terre.
- En déduire l'expression de la force volumique de gravitation.
- On considère un modèle d'atmosphère isotherme en équilibre, de température T_0 . L'air atmosphérique est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M .
On note P_0 la pression au niveau du sol, et R la constante des gaz parfaits.
Déterminez la pression P à l'altitude z en fonction de P_0 , T_0 , g_0 , M , R , R_T et z .
- Montrez que pour z petit on retrouve l'expression de $P(z)$ dans le cas d'un champ de pesanteur uniforme.
- Question subsidiaire: en dessous de quelle altitude l'approximation d'un champ de pesanteur uniforme est valide à 1% près?

Changement d'orbite – Ellipse de transfert

La Terre est supposée à symétrie sphérique, de centre C, de rayon r_0 . On note g_0 l'intensité du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol. On donne : $r_0 = 6\,400 \text{ km}$, $g_0 = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

a) Un satellite, de masse m , décrit une trajectoire circulaire rasante de rayon r_0 . Quelles sont les expressions de la vitesse v_0 et de la période T_0 du satellite en orbite circulaire rasante ? Calculer numériquement v_0 et T_0 .

b) Un satellite géostationnaire décrit une trajectoire circulaire située dans le plan équatorial, et semble fixe pour un observateur terrestre. Déterminer le rayon r_1 de l'orbite d'un satellite géostationnaire. Calculer la vitesse v_1 de ce satellite.

c) On veut faire passer un satellite de l'orbite circulaire rasante de rayon $r_0 = CP$ à l'orbite géostationnaire de rayon $r_1 = CA$ (Fig.). Un moteur auxiliaire permet de modifier la vitesse du satellite aux points P et A. Le satellite parcourt alors une demi-ellipse, dite de transfert, de périphérie P et d'apogée A.

– Déterminer littéralement puis numériquement les vitesses v'_0 et v'_1 du satellite en P et A sur sa trajectoire elliptique.

– Calculer la durée du transfert de P à A.

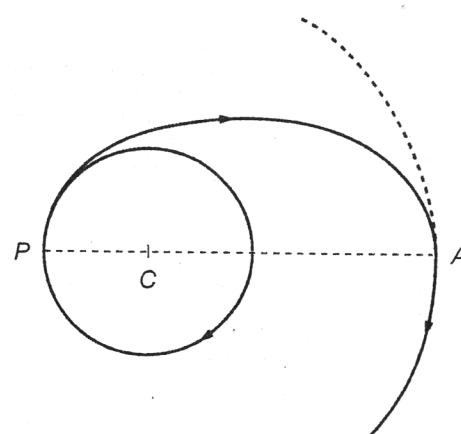
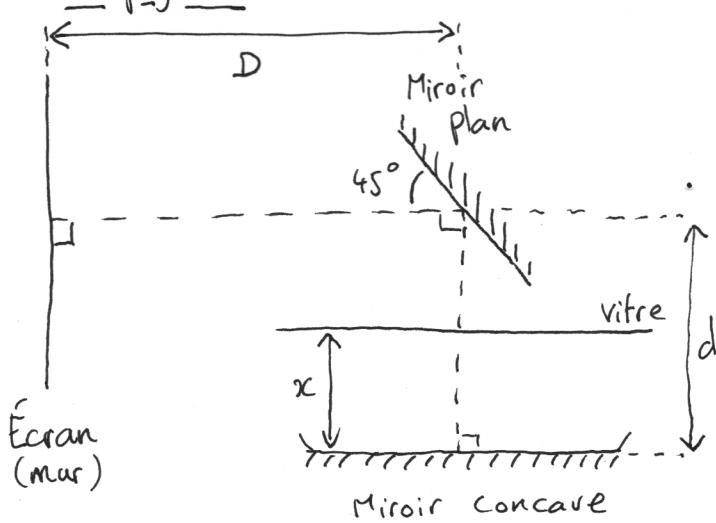


Fig.

Rétroprojecteur :

Un objet (le transparent) est placé sur la vitre.

Quelle doit être la position x de la vitre pour obtenir une image nette sur l'écran ?
 Considérer (on pourra voir le système optique équivalent sans le miroir plan)

Quel est le grandissement ?

Applications numériques :

$$D = 2,5 \text{ m}; d = 50 \text{ cm}$$

$$\text{et } R = 30 \text{ cm}.$$

Faire la construction avec tous les rayons particuliers.

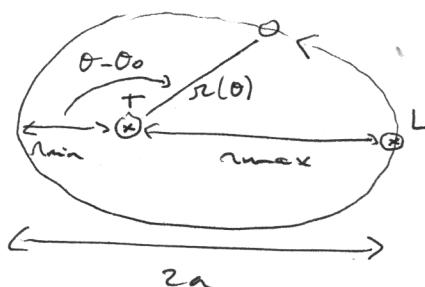
Astronomie : La Terre et la Lune

DS

157

$$19 \text{ a) } M_T \gg M_L : \quad 2a = r_{\min} + r_{\max} \Rightarrow a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$$

$$\text{AN: } a = 384400 \text{ km}$$



$$\text{éq. polaire: } r(\theta) = \frac{P}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

$$r_{\min} = r(\theta = \theta_0) = \frac{P}{1 + e}$$

$$r_{\max} = r(\theta - \theta_0 = \pi) = \frac{P}{1 - e}$$

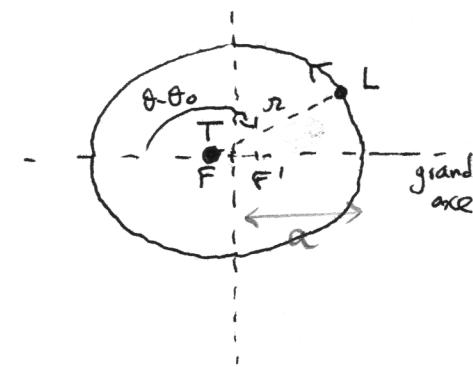
$$1 \Rightarrow (1+e)r_{\min} = (1-e)r_{\max} \Rightarrow e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$$

$$\text{AN: } e = 0,055 \quad 0 < e < 1$$

$$\begin{aligned} \text{Nous avons: } \frac{a^3}{T^2} &= \frac{\alpha}{4\pi^2 \mu} = \frac{G(M_T + M_L)}{4\pi^2 \mu} \approx \frac{GM_T}{4\pi^2 \mu} \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}} \\ 1(4) \quad & \text{AN: } T \approx 27,5 \text{ jrs} \end{aligned}$$

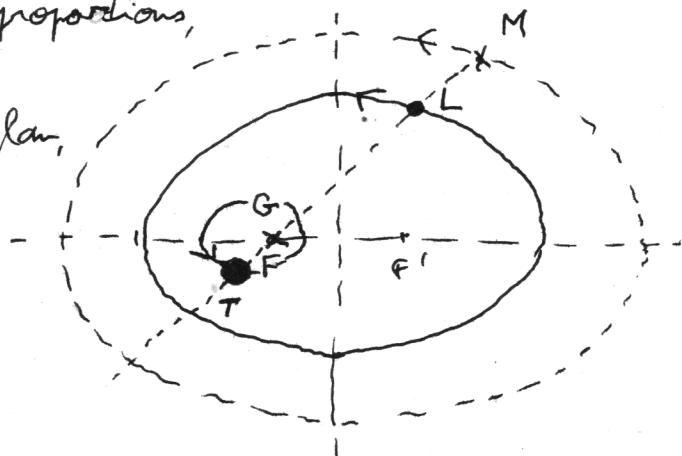
Petit axe

- 8 b)
- au a): Terre fixe et Lune qui s'identifie à la particule fictive $T = G$. Représentation dans le référentiel géocentrique T , un foyer de l'ellipse. L tourne autour de T .



- au b): G barycentre de T et L
trajectoires de T et L homothétique de celle de la particule fictive.
⇒ ellipses dans les mêmes proportions, mêmes excentricités

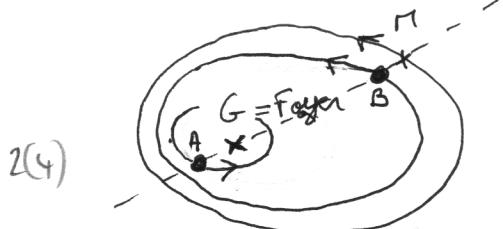
T et L tournent dans un plan, autour de G.



$$G = F$$

Sirius (55) a) La partie fictive effectue un mouvement elliptique autour du barycentre G. Les trajectoires de A et B sont ensuite obtenues à partir de rapport homothétique de centre G: $\vec{r} = \vec{GM} = \vec{AB}$

6 Définition de G: $m_A \vec{GA} + m_B \vec{GB} = \vec{0}$

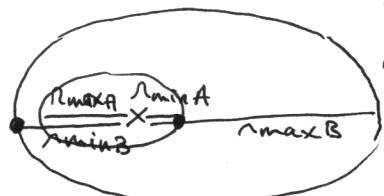


$$\vec{GM} = \vec{AG} + \vec{GB} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{GB} + \vec{GB}$$

$$\Rightarrow \vec{GB} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{GM}, \quad \vec{GA} = -\frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{GM} \quad (*)$$

Nous avons : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{\alpha}{4\pi^2 \mu} = G \frac{m_A + m_B}{4\pi^2 \mu}$

b) 3



$$d_{\min} = r_{\min A} + r_{\min B}$$

$$d_{\max} = r_{\max A} + r_{\max B}$$

$$e = \frac{r_{\max A} - r_{\min A}}{r_{\max A} + r_{\min A}}$$

homothétiques et ont la même excentricité.

8

$$\Rightarrow d_{\max} - d_{\min} = r_{\max A} - r_{\min A} + r_{\max B} - r_{\min B}$$

$$= e (r_{\max A} + r_{\min A} + r_{\max B} + r_{\min B})$$

$$= 2e (a_A + a_B)$$

or (*)

$$a_A = \frac{m_B}{m_A + m_B} a$$

$$a_B = \frac{m_A}{m_A + m_B} a$$

$$\Rightarrow a = a_A + a_B$$

$$\Rightarrow e = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{2a}$$

AN: $e = 0,591$

1) $a_A = \frac{1,03}{3,13} 19,8 \text{ u.a.} = 6,5 \text{ u.a.}$

2) $a_B = \frac{2,10}{3,13} 19,8 \text{ u.a.} = 13,3 \text{ u.a.}$

2) $e = \frac{c}{a} \Rightarrow c_A = e a_A, \quad c_B = e a_B$

$c_A = 3,8 \text{ u.a.}, \quad c_B = 7,8 \text{ u.a.}$

b) $\sqrt{c^2 + b^2} = a^2$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

2) $b_A = \sqrt{a_A^2 - c_A^2} = 5,3 \text{ u.a.}$

2) $b_B = \sqrt{a_B^2 - c_B^2} = 10,8 \text{ u.a.}$

d) $\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_A + m_B/2)}{4\pi^2 \mu} = \frac{a^3}{T^2} \frac{m_A + m_B/2}{m_A + m_B}$

$\Rightarrow T' = T \sqrt{\frac{m_A + m_B}{m_A + m_B/2}} = 1,09 T$

4

2

$c = 11,7 \text{ u.a.} \quad b = 16 \text{ u.a.}$

Atmosphère isotherme avec champ de pesanteur variable:

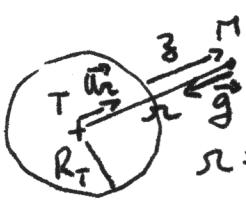
[28]

3. 1. Entrée de forces volumiques : $-\vec{\nabla}P + \vec{f}_v = \vec{0}$

$$\vec{f}_v = \frac{d\vec{F}_v}{dV}$$

$$2. \vec{g} = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_r$$

Force volumique de pression autres Forces volumiques



$$g_0 = \|\vec{g}(r=R_T)\| = G \frac{R_T}{R_T^2}$$

$$4. \quad r = R_T + z \Rightarrow \vec{g} = -g_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r \Rightarrow \vec{g} = -g_0 \frac{R_T^2}{(R_T+z)^2} \vec{u}_r$$

$$3. d\vec{F}_v \text{ grav.} = dm \vec{g}$$

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad (\text{masse volumique})$$

$$\vec{f}_v \text{ grav.} = \frac{d\vec{F}_v \text{ grav.}}{dV}$$

$$\vec{f}_v \text{ grav.} = -\rho g_0 \frac{R_T^2}{(R_T+z)^2} \vec{u}_r$$

$$4. -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} = \vec{0} ; \quad P(r) \Rightarrow \vec{\nabla}P = \frac{dP}{dr} \vec{u}_r$$

$$\stackrel{\text{sur } \vec{u}_r}{\Rightarrow} \frac{dP}{dr} = -\rho g_0 \frac{R_T^2}{(R_T+z)^2}, \quad \text{au choix on peut tout exprimer en fonction de } r \text{ ou } z, \text{ on choisit: } r = R_T + z \Rightarrow dr = dz$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\rho g_0 \frac{R_T^2}{(R_T+z)^2}; \quad P dV = dm R_T = \frac{dm}{M} R_T$$

$$\stackrel{z \Rightarrow}{\Rightarrow} P = \frac{PM}{R_T}$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{M g_0 R_T^2}{R_T} \frac{dz}{(R_T+z)^2} \Rightarrow \left[\ln P \right]_{z=0}^z = -\frac{M g_0 R_T^2}{R_T} \left[-\frac{1}{R_T+z} \right]_{z=0}^z$$

$$\Rightarrow \ln \frac{P}{P_0} = -\frac{M g_0 R_T^2}{R_T} \left[-\frac{1}{R_T+z} + \frac{1}{R_T} \right] = -\frac{M g_0 R_T}{R_T} \frac{z}{R_T+z}$$

$$5. z \ll R_T$$

$$12 \Rightarrow P(z) = P_0 e^{-\frac{M g_0 R_T}{R_T} \frac{z}{R_T+z}}$$

$$\stackrel{z \ll R_T}{\Rightarrow} \frac{z}{R_T+z} \approx \frac{z}{R_T}$$

$$3. P > P' \quad \frac{P'}{P} = \frac{gg}{100} = e^{-\frac{M g_0 z}{R_T} \left(1 - \frac{R_T}{R_T+z} \right)}$$

$$\Rightarrow P'(z) = P_0 e^{-\frac{M g_0 z}{R_T}}$$

$$3. \quad z \left(\frac{R_T}{R_T+z} - 1 \right) = \frac{R_T}{M g_0} \ln(gg/100) \Rightarrow \text{équation du 2nd degré} \\ \Rightarrow 399\%$$

OK m chose