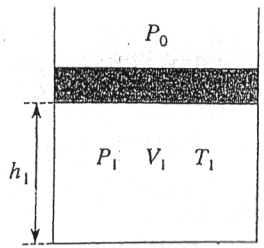
PCSI - Devoir Surveillé de Physique

Les expressions seront d'abord exprimées sous forme littérale, ensuite les calculs seront posés avec les unités et finalement le calcul numérique effectué. La calculatrice est autorisée.

Lundi 14 mai 2012 - 2 h.

Compression monotherme d'un gaz parfait

De l'air, à la température T_1, est contenu dans un cylindre, aux parois diathermes, fermé par un piston , de section S et de masse M_0. L'ensemble est placé dans l'air à la pression P_0. À l'équilibre, le piston se trouve à la distance h_1 du fond du récipient.



état initial

Diatherme : laisse les transferts thermiques s'effectuer.
Le gaz est supposé parfait.

L'air du cylindre subit une transformation monotherme, car il n'échange de la chaleur qu'avec l'atmosphère extérieure dont la température T_0 est supposée constante. Dans l'état initial, l'air enfermé dans le cylindre est dans l'état (P_1, T_0, h_1).

1) On pose sur le piston la masse M_0. Après un certain temps, l'air du récipient se retrouve à la température T_0 et le piston se stabilise à la hauteur h_3 du fond du récipient. Calculer le travail W_T échangé entre l'air intérieur et le milieu extérieur ainsi que l'état final (P_2, T_0, h_3). Faire l'application numérique.

2) On pose successivement sur le piston des masses m $(m \ll M_0)$ en attendant à chaque fois que la température de l'air intérieur se stabilise (à la valeur T_0) et que le piston s'immobilise ; on répète l'opération jusqu'à ce que la surcharge totale soit égale à M_0. Calculer le travail W'_T échangé ainsi que l'état final (P_2, T_0, h'_3).

Faire l'application numérique et comparer les résultats obtenus à ceux de la question **1)**. Conclusion.

Données : $P_0 = 10^5$ Pa ; $g \approx 10$ m.s^{-2} ; $S = 0{,}1$ m^2 ;

$M = 100$ kg ; $h_1 = 1$ m ; $T_0 = 300$ K ; $\gamma = \dfrac{C_{P,m}}{C_{V,m}} = 1{,}4$.

- Transformations cycliques d'un gaz parfait et d'un gaz réel

Les résultats seront d'abord donnés sous forme littérale puis sous forme numérique.

I. Cycle de Lenoir

L'état initial « A » d'une mole de gaz parfait est caractérisé par une pression $P_0 = 2.10^5$ Pa et $V_0 = 14$ L. On fait subir successivement à ce gaz :

- une détente isobare qui double son volume (état « B »)
- une compression isotherme qui le ramène à son volume initial (état « C »)
- un refroidissement isochore qui le ramène à l'état initial « A ».

1. Donner l'allure du cycle dans un diagramme de Watt.
2. A quelle température s'effectue la compression isotherme ? En déduire la pression maximale atteinte.
3. Calculer le travail et le transfert thermique reçu par le gaz au cours de chacune des transformations AB, BC et CA. Calculer leur somme et commenter.

II. Cycle d'un gaz réel

Une mole d'un gaz réel monoatomique contenue dans un cylindre décrit un cycle ABCA. La transformation AB est isotherme à la température $T_A = 301$ K. Dans l'état « A », le volume est $V_A = 5{,}0$ *l*, dans l'état « B », $V_B = 0{,}50$ *l*. La transformation BC est isobare, à la pression P_B. La transformation CA est isochore.

Le gaz est décrit par son équation d'état et son énergie interne :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)V = RT \quad \text{et} \quad U = \frac{3}{2}RT - \frac{a}{V}$$

avec $a = 0{,}135 m^6.Pa.mol^{-2}$ et $R = 8{,}31$ J..K^{-1}.mol^{-1}

1. Donner l'allure du cycle dans un diagramme de Watt.
2. Calculer P_A, P_B, P_C et T_C.
3. Calculer le travail et le transfert thermique reçu par le gaz au cours de chacune des transformations AB, BC et CA. Calculer leur somme et commenter.

Bilan d'entropie

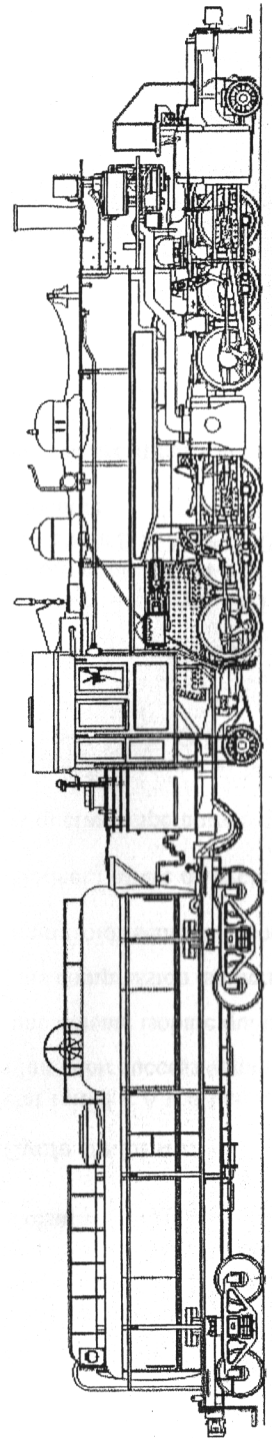
Nous considérons un gaz parfait enfermé dans une enceinte calorifugée et rigide. Une résistance à l'intérieure de l'enceinte permet de chauffer le gaz. Le volume de l'enceinte est noté V, il vaut 10 L. La résistance r, de 10 Ω, est reliée à un générateur de tension E.
Initialement le gaz est à la pression P_0 d'un bar et à la température T_0 de 20°C. La résistance chauffe le gaz pendant un temps t.
Constante des gaz parfait : R = 8,3 J/(K.mol). Le gaz est diatomique.

1) Nous prenons : E = 10 V et t = 100 s.
Déterminez les caractéristiques du gaz P_1 et T_1 en fin de chauffage exprimées en fonction de E, r , t, T_0, P_0, V et γ.
Réalisez l'application numérique.
Si maintenant nous prenons E = 2,5 V et t = 1600 s, que dire de P_1 et T_1 ?

2)a) Nous nous plaçons dans ce deuxième cas où le gaz est chauffé lentement, on suppose que l'on a constament la température de la résistance égale à celle du gaz.
Déterminez ΔS, S_e et S_c.

2)b) Nous nous plaçons dans le premier cas où le gaz est chauffé rapidement, on suppose que E est choisi tel que la température de la résistance soit constante et fixée dès le départ à T_1.
Déterminez ΔS, S_e et S_c.

2)c) Indiquez, en vous justifiant à l'aide du a) et du b), si S, S_e et S_c sont des fonctions d'état. Les résultats sont-ils conformes au second principe ?



Locomotive

Nous sommes en 1908 sur le transsibérien. La locomotive traverse la toundra à vive allure. Le froid arrive et l'eau commence à geler. Le chauffeur en sueur s'active pour ajouter le charbon au fourneau et maintenir une température de 500°C. Nous avons un modèle de locomotive Mallet qui génère une puissance de 3000 ch (1 cheval ~ 0,75 kW).

1) Montrer que la locomotive ne peut fonctionner avec une seule source de chaleur. Expliquez à l'aide des deux premiers principes de la thermodynamique le principe du moteur ditherme.

2) Qu'entendons nous par rendement ?
Donner l'expression de sa valeur maximale.
Calculer sa valeur numérique pour notre locomotive.

3) Le rendement effectif est ici à 50% de sa valeur maximale.
A quelle rhytme le chauffeur doit ajouter du charbon au fourneau (pouvoir calorifique du charbon : 8 kW.h/kg) ?

* Locomotive : 1) Cours : dem. que le moteur monotherme n'∃ pas.
dem des signes de Q_C et Q_F connaissant celui de W.

2) cours. cours : $r_{max} = 1 - \frac{T_F}{T_C}$ AN : $r_{max} = 1 - \frac{(273+0)K}{(273+500)K}$ (l'eau gèle)

$\Rightarrow \boxed{r_{max} = 0,647 = 64,7\,\%}$

3) $r = p\,r_{max}$ avec $p = 0,5 = 50\%$ $\mathcal{P} = -3000\,ch = -2250\,kW$

moteur : $r \overset{\text{par cycle}}{=} \frac{-W}{Q_C} \overset{\text{par sec.}}{=} -\frac{\mathcal{P}}{q_C} = p\,r_{max} \Rightarrow q_C = -\frac{\mathcal{P}}{p\,r_{max}}$

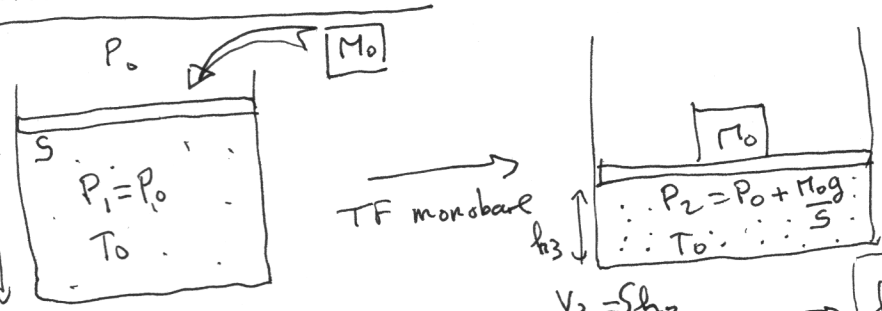
AN : $q_C = +\frac{2250\,kW}{0,5 \times 0,647} \Rightarrow \underline{q_C = 6955\,kW}$

Sachant qu'cependant 1 h, 1 kg de charbon apporte 8 kW il en faut ici $\frac{6955}{8}$ kg toutes les heures soit : 869 kg par h ou $\boxed{14,5\,kg \text{ par min.}}$

* Compression monotherme d'un GP :

(28)

1)



$V_1 = Sh_1$ $V_3 = Sh_3$

$P_2 V_3 = nRT_0 = P_1 V_1$

$\left(P_0 + \frac{M_0 g}{S}\right) h_3 = P_0 h_1$

$\Rightarrow \boxed{h_3 = h_1 \Big/ \left(1 + \frac{M_0 g}{P_0 S}\right)}$

1 1 1 1

$\boxed{P_2 = P_0 + \frac{M_0 g}{S}}$ AN : $P_2 = 10^5\,Pa + \frac{100\,kg \times 10\,m}{0,1\,m^2 \cdot s^2}$

$\Rightarrow \boxed{P_2 = 1,1 \cdot 10^5\,Pa}$

AN : $h_3 = 1\,m / 1,1$ $\boxed{h_3 \simeq 0,91\,m}$

1 1 1

$W_T + Q = \Delta U = 0$ car le GP à la fin température au début et à la fin. (1er loi de Joule)

2 $W_T = -\int P_{ext}\,dV = -P_2(V_3 - V_1)$

$= -\left(P_0 + \frac{M_0 g}{S}\right) S \left(\frac{1}{1 + \frac{M_0 g}{P_0 S}} - 1\right) h_1 = -P_0 S h_1 \left(1 - 1 - \frac{M_0 g}{P_0 S}\right)$

1 1 1 $\Rightarrow \boxed{W_T = M_0 g h_1}$ AN : $W_T = 100\,kg \times 10\,m\,s^{-2} \times 1\,m \Rightarrow \boxed{W_T = 1000\,J}$

2) $W'_T = -\int P_{ext}\,dV = -\int P\,dV$ TF quasi-statique et éq. mécanique.

$PV = nRT_0 \Rightarrow W'_T = -nRT_0 \ln\left(\frac{V'_3}{V_1}\right) = -P_0 S h_1 \ln\left(\frac{1}{1 + \frac{M_0 g}{P_0 S}}\right)$

$\boxed{W'_T = P_0 S h \ln\left(1 + \frac{M_0 g}{P_0 S}\right)}$ en effet $\begin{cases} V'_3 = V_3 \\ h'_3 = h_3 \end{cases}$ car si P_2, T_0 et n les m̂ qu'au 1) $\Rightarrow V_3(h_3)$ le m̂

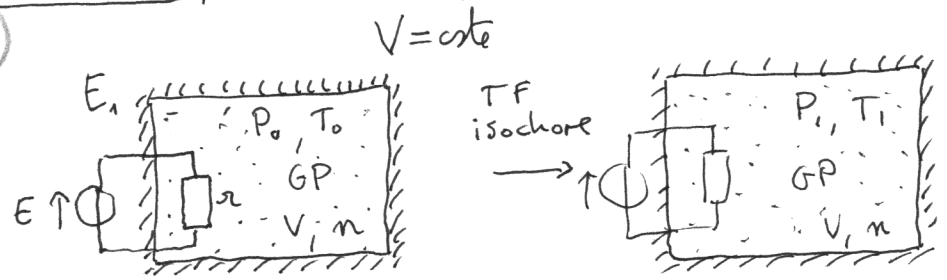
AN : $\boxed{W'_T \simeq 953\,J}$ $W'_T < W_T$ | $Q'_T + W'_T = 0 = Q_T + W_T$ $\Rightarrow Q'_T > Q_T \Rightarrow |Q_T| > |Q'_T|$

↳ TF réversible

TF non rév 1) $\Rightarrow$ car éq. méca, thermique et quasistatique. frottements internes du gaz en plus à dissiper vers l'extérieur.

Bilan d'entropie :

(48)



2 1) D'après le 1er principe : $\Delta E = \Delta(E_m + U) = W + Q = \Delta U$ car E_m = cste

2 $W = -\int P_{ext}\,dV$, V = cste $\Rightarrow W = 0$ d'où : $Q = \Delta U \Rightarrow (UI)t = nC_v\Delta T$

2

2 $\Rightarrow \frac{nR}{\gamma-1}\Delta T = \frac{E^2}{r}t \Rightarrow T_1 = \frac{\gamma-1}{nR}\frac{E^2}{r}t + T_0$ or $P_0V = nRT_0$

2 $\Rightarrow T_1 = \frac{T_0}{P_0V}(\gamma-1)\frac{E^2}{r}t + T_0 \Rightarrow \boxed{T_1 = T_0\left(1 + \frac{\gamma-1}{P_0V}\frac{E^2}{r}t\right)}$, de plus $P_1V = nRT_1$

1 et $P_1 = \frac{nR}{V}T_0\left(1 + \frac{\gamma-1}{P_0V}\frac{E^2}{r}t\right) \Rightarrow \boxed{P_1 = P_0\left(1 + \frac{\gamma-1}{P_0V}\frac{E^2}{r}t\right)}$

AN : $T_1 = (273+20)K \cdot \left(1 + \underbrace{\frac{\frac{7}{5}-1}{10^5 Pa \times 10^{-2} m^3}\frac{10V^2}{10\Omega}100s}_{2/5 = 0,4}\right)$

$= 293 \times 1,4\ K$

2 $\Rightarrow T_1 = 410,2K \simeq 137°C \Rightarrow \Delta T \simeq 117°C$, $P_1 = 1,4$ bar

1

Energie fournie par effet Joule : $Q_{effet\ Joule} = Q = \frac{E^2}{r}t = \frac{(E/4)^2}{r}16t$

3 $\Rightarrow$ Les facteurs 16 se simplifient, nous avons donc la même énergie apportée et les même P_1 et T_1, que cette énergie soit amené lentement ou rapidement !

2)a) identité thermodynamique : $dU = TdS - PdV \overset{V=cste}{=} TdS \Rightarrow dS = \frac{dU}{T}$

GP $\Rightarrow dS = nC_v\frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S = \int dS = \frac{nR}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \Rightarrow \boxed{\Delta S = \frac{P_0V}{T_0(\gamma-1)}\ln\frac{T_1}{T_0}}$

AN : $\Delta S = \frac{10^5 Pa \times 10^{-2} m^3}{293K \times 0,4}\ln\left(\frac{410,2K}{293K}\right) \Rightarrow$ $\boxed{\Delta S_{a)} = 2,871\ J/K}$

$S_e = \int \frac{\delta Q}{T_{ext}} \overset{T_{ext}=T_r=T}{\underset{(\delta Q)_V = dU}{=}} \int \frac{dU}{T}$ $\boxed{S_{e_{a)}} = 2,871\ J/K}$ $\boxed{S_{c_{a)}} = 0\ J/K}$

$\Rightarrow S_e = \int nC_v\frac{dT}{T} = \Delta S$, normal car transfo réversible. $\Delta S = S_e + S_c$, $S_c = \Delta S - S_e$

2)b) $\Delta S_{b)} = \Delta S_{a)}$ (S fonction d'état)

$S_e = \int \frac{\delta Q}{T_{ext}} = \frac{Q}{T_1} = \frac{\Delta U}{T_1} = \frac{nR}{\gamma-1}\frac{T_1 - T_0}{T_1} \Rightarrow \boxed{S_e = \frac{P_0V}{\gamma-1}\left(\frac{T_1-T_0}{T_1T_0}\right)}$

AN $S_e = \frac{10^5 \cdot 10^{-2} Pa\,m^3}{0,4} \times \frac{(410,2-293)K}{410,2 \times 293 K^2}$ $\boxed{S_e = 2,854\ J/K}$

2)c) La variation de S ne dépend pas du chemin suivi, c'est une fonction d'état. Se et Sc en car dépendent ce ne sont pas des fn d'état $\Rightarrow \boxed{S_c = 0,017\ J/K}$ $S_c > 0$

$S_{e_{a)}} \neq S_{e_{b)}}$ $S_{c_{a)}} \neq S_{c_{b)}}$. $S_{c_{a)}} = 0 \Rightarrow$ TF rév. car éq thermique. $S_{c_{b)}} > 0$ TF irrév car $T \neq T_{ext}$.

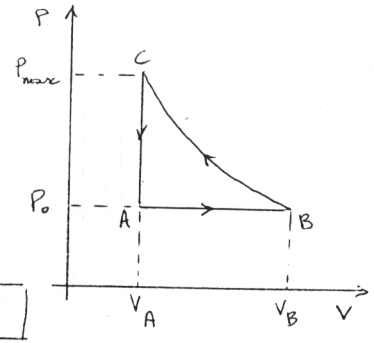
(52) PCSI cor. DS mai 2022

B- Transformations cycliques d'un gaz parfait et d'un gaz réel

22

I Cycle de Lenoir

3 2. Equation d'état du GP dans l'état A : 1.



$T_c = \frac{P_0 V_0}{nR} = \frac{P_0 V_0}{R}$

la transfo. AB étant isotherme :

$P_A = P_B = \frac{nRT_0}{V_A} = \frac{nRT_B}{V_B}$ (T_B : température de l'isotherme)

3 $T_B = T_0 \frac{V_B}{V_A} = \frac{P_0 V_0}{nR} \times \frac{2V_0}{V_0}$: $\boxed{T_B = \frac{2P_0V_0}{R} = 2T_0 = 674\,K}$

la pression maximale est atteinte à la fin de la compression isotherme :

3 $P_{max} = P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{nRT_B}{V_0}$ $\boxed{P_{max} = 2P_0 = 4.10^5\ Pa}$

3. $W_{AB} = -\int_{AB} P_0\, dV$ (isobare) $W_{AB} = -P_0(V_B - V_A)$: $\boxed{W_{AB} = -P_0V_0 = -2,8\,kJ}$

6x2

• $W_{BC} = -\int_{BC} P\,dV = -nRT_B \int_{BC} \frac{dV}{V} = -2P_0V_0 \ln\frac{V_C}{V_B}$. $\boxed{W_{BC} = 2P_0V_0 \ln 2}$ $W_{BC} = +3,9\,kJ$

• $\boxed{W_{CA} = 0}$ (isochore)

• $Q_{AB} = (U_B - U_A) - W_{AB} = n\,c_V(T_B - T_A) + P_0V_0 = c_V \frac{P_0V_0}{R} + P_0V_0$

$\boxed{Q_{AB} = \left(\frac{c_V}{R} + 1\right) P_0V_0 = \frac{c_P}{R} P_0V_0}$ (= 7,0 kJ pour 1 GPM) (9,8 kJ pour un GPD)

• $Q_{BC} = (U_C - U_B) - W_{BC} = n\,c_V(T_C - T_B) - W_{BC} = -W_{BC}$ (transfo isotherme)

$\boxed{Q_{BC} = -W_{BC} = -2P_0V_0 \ln 2}$ (= −3,9 kJ)

• $Q_{CA} = (U_A - U_C) - W_{CA} = U_A - U_C = n\,c_V(T_A - T_C) = c_V(T_C - T_B)$

$\boxed{Q_{CA} = -c_V \frac{P_0V_0}{R}}$ (= −4,2 kJ pour 1 GPM) (−7 kJ pour 1 GPD)

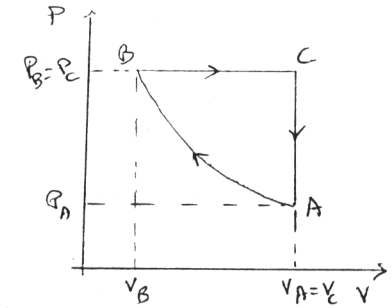
• $W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = 0$

2 Ce résultat est bien en accord avec le premier principe. En effet
1 cette somme représente la somme du travail total W reçu au cours du
2 cycle et de la quantité de chaleur totale Q reçue au cours du cycle.
D'après le 1er principe $W + Q = \Delta U = U_A - U_A = 0$ (U fonction d'état)

30

II Cycle d'un gaz réel

1.



3 2. * $\boxed{P_A = \frac{RT_A}{V_A} - \frac{a}{V_A^2} = 495\ bar}$

3

3 1 * $\boxed{P_B = P_C = \frac{RT_B}{V_B} - \frac{a}{V_B^2} = 44,6\ bar}$

(On a $T_B = T_A$)

* $T_C = \left(P_C + \frac{a}{V_C^2}\right)\frac{V_C}{R}$ avec $V_C = V_A$

3 $\boxed{T_C = \left(\frac{RT_A}{V_B} - \frac{a}{V_B^2} + \frac{a}{V_A^2}\right)\frac{V_A}{R} = 2688\ K}$

3. * $W_{AB} = -\int_{AB} P\,dV = -\int\left(\frac{RT}{V} - \frac{a}{V^2}\right)dV$ avec T = cst sur AB.

6x2

$\boxed{W_{AB} = -RT_A \ln\frac{V_B}{V_A} - a\left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_A}\right) = 5,52\,kJ}$

* $W_{BC} = -\int_{BC} P_B\,dV = -P_B(V_C - V_B)$ (transfo isobare).

$\boxed{W_{BC} = P_B(V_B - V_A) = -20,1\,kJ}$

* $\boxed{W_{CA} = 0}$ (isochore)

* $Q_{AB} = (U_B - U_A) - W_{AB} = \frac{3}{2}R(\cancel{T_B - T_A}) - a\left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_A}\right) + RT_A \ln\frac{V_B}{V_A} + a\left(\frac{1}{V_B} - \frac{1}{V_A}\right)$

$\boxed{Q_{AB} = RT_A \ln\frac{V_B}{V_A} = -5,76\,kJ}$

* $Q_{BC} = (U_C - U_B) - W_{BC}$

$\boxed{Q_{BC} = \frac{3}{2}R(T_C - T_B) - a\left(\frac{1}{V_A} - \frac{1}{V_B}\right) - P_B(V_B - V_A) = 50,1\,kJ}$

* $Q_{CA} = (U_A - U_C) - W_{CA} = \frac{3}{2}R(T_A - T_C)$

$\boxed{Q_{CA} = \frac{3}{2}R\left\{T_A - \left(\frac{RT_A}{V_B} - \frac{a}{V_B^2} + \frac{a}{V_A^2}\right)\frac{V_A}{R}\right\} = -29,8\,kJ}$

* $Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} + W_{AB} + W_{BC} + W_{CA} = W + Q = 0$ ce à quoi on s'attend, puisque
2 d'après le 1er principe $Q + W = \Delta U = 0$ (transformation cyclique :
1 $\Delta U = U_A - U_A = 0$)
2