

4h

Problème 1

## I) Étude d'un oscillateur.

1-1) On considère le quadripôle représenté sur la figure 1 ci-dessous.

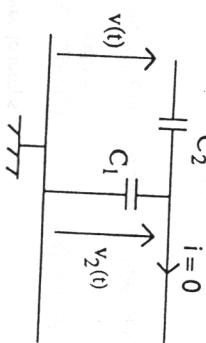


fig. 1

Dans ce montage,  $C_1$  et  $C_2$  sont les capacités des deux condensateurs;  $v(t)$  et  $v_2(t)$  sont les valeurs instantanées des tensions d'entrée et de sortie du quadripôle.

On suppose que le régime de fonctionnement du quadripôle est sinusoïdal de pulsation  $\omega$ .

Pour la suite du problème, on utilisera la notation complexe dont on rappelle que :

- l'amplitude complexe de la grandeur instantanée sinusoïdale  $v(t)$  est notée  $\underline{V}$ ,
- le nombre complexe dont le carré est égal à -1 est noté  $j$  ce qui implique  $j^2 = -1$ .

1-1-1) Donner le nom de ce montage classique et préciser son utilité.

Exprimer le rapport  $\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}}$  en fonction de  $C_1$  et  $C_2$ .Quelle relation existe-t-il entre les phases de  $v_2(t)$  et de  $v(t)$  ?

1-1-2) On considère maintenant le quadripôle représenté sur la figure 2 ci-dessous.

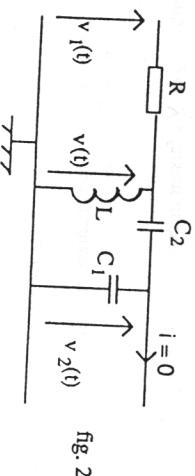


fig. 2

L'amplificateur opérationnel est inséré dans le montage représenté sur la figure 4 ci-dessous.  $R_1$  et  $R_2$  sont deux résistances. On remarquera la présence du quadripôle de la figure 2 dans ce montage.

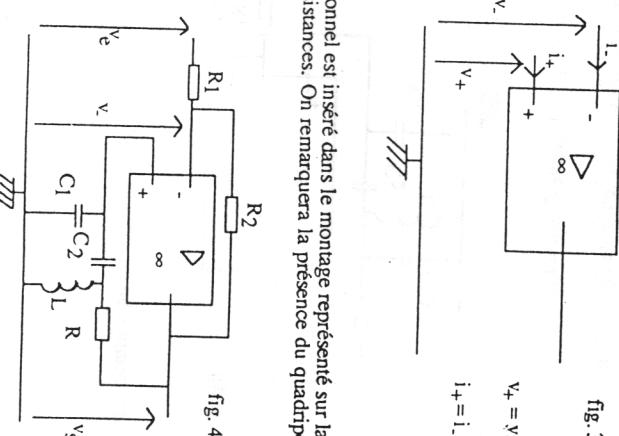


fig. 3

1-2) On envisage maintenant l'utilisation d'un amplificateur opérationnel, supposé idéal, en régime de fonctionnement linéaire. Dans ces conditions, on a:  $v_+ = v_-$  et  $i_+ = i_- = 0$  (figure 3)

Explicitier les coefficients  $a$ ,  $b$  et  $d$  de la fonction de transfert  $T$  en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .Quelles sont les dimensions des coefficients  $a$ ,  $b$  et  $d$ ?

$$T(j\omega) = \frac{1}{a + \frac{1}{bj\omega} + dj\omega}$$

On reconnaît, en partie dans cette représentation, le quadripôle de la figure 1.  
Dans ce montage,  $R$  est la valeur de la résistance,  $L$  celle de l'inductance de la bobine;  $v_1(t)$  est la tension d'entrée du nouveau quadripôle.  
On convient de noter  $Z$  l'impédance complexe de l'ensemble formé par la bobine d'inductance ( $L$ ) et les deux condensateurs ( $C_1$  et  $C_2$ ).

Établir l'expression de  $Z$  en fonction de  $L$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\omega$ .1-1-3) Exprimer le rapport  $\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}$  en fonction de  $R$  et  $Z$ , puis en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\omega$ .1-1-4) En déduire l'expression de la fonction de transfert  $T(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}$  que l'on mettra sous la forme:

$$T(j\omega) = \frac{1}{a + \frac{1}{bj\omega} + dj\omega}$$

1-1-5) En déduire l'expression de la tension  $v_2(t)$  en fonction de  $v_1(t)$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $\omega$ .

1-2-1) On envisage, pour ce montage, un régime de fonctionnement sinusoïdal permanent.

Exprimer l'amplitude complexe,  $\underline{V}_e$ , de deux manières différentes, tout d'abord  
- en fonction de  $\underline{V}_e$ ,  $\underline{V}_s$ ,  $R_1$  et  $R_2$ , puis  
- en fonction de  $\underline{I}$  et  $\underline{V}_s$ .

En déduire une relation entre  $\underline{V}_e$  et  $\underline{V}_s$  faisant intervenir  $\underline{I}$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

1-2-2) On relie maintenant  $R_1$  directement à la masse, ce qui revient à annuler la tension d'entrée, ( $v_e = 0$ ).

Montrer que, sous certaines conditions, on peut malgré tout avoir  $v_s(t)$  différent de zéro.

Dans cette situation,  $v_s(t)$  peut être une fonction sinusoïdale du temps. Exprimer la condition d'oscillation par une relation simple entre  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

On pose  $C' = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ . Exprimer la pulsation des oscillations en fonction de  $L$  et  $C'$ .

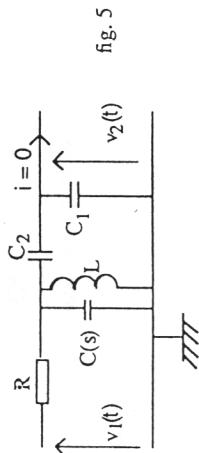
## II) Étude d'un oscillateur à fréquence modulée.

2-1)

Pour réaliser un oscillateur à fréquence modulée, on branche une diode à capacité variable (ou "varicap") en parallèle avec la bobine d'inductance  $L$ .  
Une varicap peut être assimilée à un condensateur dont la capacité  $C(s)$  est fonction d'une grandeur  $s$ , susceptible de varier avec le temps.

La capacité  $C(s)$  varie avec  $s$  selon la loi:  $C(s) = A s^n$

Le quadripôle représenté sur la figure 2 est alors modifié. Son nouveau schéma est reporté sur la figure 5:



Établir les expressions de  $\Omega$  et du taux de modulation  $\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$ .

On fixe  $s$  à la valeur constante  $S_0$ , pour laquelle  $C(S_0) = C_0$ .

Exprimer la pulsation  $\omega_0$  de l'oscillateur, en fonction de  $C_0$ ,  $L$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

2-3) On impose maintenant  $s(t) = S_0 + \epsilon \cos(\alpha t)$ , où  $\epsilon$  et  $\alpha$  sont des constantes positives.

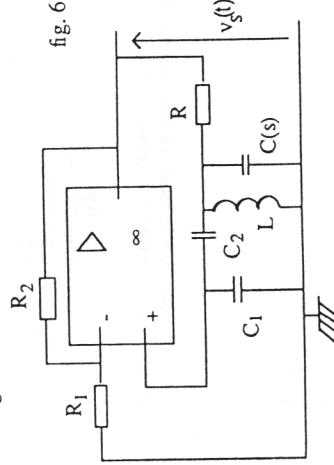
2-3-1) Sachant que  $\epsilon < S_0$ , établir l'expression approchée au premier ordre de  $C(t)$ .

2-3-2) En déduire l'expression de la pulsation instantanée  $\omega(t)$  de l'oscillateur.

On convient de poser:  $\omega(t) = \omega_0 (1 - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cos \Omega t)$ .

On fixe  $s$  à la valeur constante  $S_0$ , pour laquelle  $C(S_0) = C_0$ .

2-2) On reprend le montage de la figure 4, dans lequel  $v_e = 0$ , en y introduisant la "varicap".  
On obtient le montage de la figure 6.



La fonction de transfert  $\underline{T}'(j\omega)$  de ce nouveau quadripôle peut s'écrire:

$$\underline{T}'(j\omega) = \frac{1}{a' + \frac{1}{b'j\omega} + d'j\omega}$$

Expliquer les coefficients  $a'$ ,  $b'$  et  $d'$  en fonction de  $C(s)$ ,  $R$ ,  $L$ ,  $C_1$  et  $C_2$ , en remarquant qu'il suffit de remplacer l'impédance complexe de la bobine par celle de l'ensemble bobine et "varicap" en parallèle.

pb I - Etude d'un oscillateur

I-1) M. Diviseur de tension :  $\frac{V_2}{V} = \frac{1/jC_1\omega}{1/jC_1\omega + 1/jC_2\omega} \Rightarrow \boxed{\frac{V_2}{V} = \frac{C_2}{C_1+C_2}}$

$\arg(\frac{V_2}{V}) = 0 \Rightarrow v_2(t) \text{ et } v(t) \text{ en phase} : \varphi_{v_2} = \varphi_v$

I-1.2)  $Z = (Z_{C_1} + Z_{C_2}) // Z_L \text{ car } i=0$

$$\Rightarrow Z = \frac{(Y_{jC_1\omega} + Y_{jC_2\omega})j\omega}{Y_{jC_1\omega} + Y_{jC_2\omega} + jL\omega} \Rightarrow \boxed{Z = \frac{L(C_1 + C_2)j\omega}{C_1 + C_2 + L(C_1 + C_2)(j\omega)^2}}$$

I-1.3)  $\boxed{\frac{V}{V_1} = \frac{Z}{Z+R}} \Rightarrow \frac{V}{V_1} = \frac{jL(C_1 + C_2)\omega}{jL(C_1 + C_2)\omega + R(C_1 + C_2) + RL(C_1 + C_2)(j\omega)^2}$

I-1.4)  $I = \frac{V_2}{V} \frac{V}{V_1} = \frac{jLC_2\omega}{jLC_1(C_1 + C_2)\omega + R(C_1 + C_2) + RL(C_1 + C_2)(j\omega)^2}$

$$\boxed{I = \frac{1}{\frac{C_1 + C_2}{C_2} + \frac{R(C_1 + C_2)}{LC_2 j\omega} + RC_1 j\omega}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{C_1 + C_2}{C_2} \quad b = \frac{LC_2}{R(C_1 + C_2)} \quad d = RC_1$$

a sans dimension (car I sans dim)

$$\boxed{[b] = \text{s} \quad \text{car } [\omega] = \text{s}^{-1} \quad [c] = \text{s}}$$

I-2) 1) LNTP :  $\frac{V_- - V_2}{R_1} + \frac{V_- - V_S}{R_2} = 0 \Rightarrow \boxed{V_- = \frac{V_2 R_2 + V_S R_1}{R_2 + R_1}}$

$$\boxed{I = \frac{V_-}{V_S} \quad V_- = I V_S \Rightarrow (R_2 + R_1)I V_S = V_2 R_2 + V_S R_1, \\ \Rightarrow V_2 R_2 = V_S (-R_1 + (R_2 + R_1)I)}$$

I-2)  $V_2 = 0 \Rightarrow V_S (-R_1 + (R_2 + R_1)I) = 0$

$$V_S \neq 0 \Rightarrow -R_1 + (R_1 + R_2)I = 0 \Rightarrow I = +\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \Rightarrow \boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{C_2}{C_1}} \\ \frac{R(C_1 + C_2)}{LC_2 j\omega} + R C_1 j\omega = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{R C_1}, \quad \frac{R(C_1 + C_2)}{L C_2} = \frac{R}{j\omega L C_1} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{L C_1'}}$$

## II. Etude d'un oscillateur à fréquence modulée :

2) 1)

$$Z_{\text{series}} = - \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} = j \omega L ; L' = \frac{L}{1 - \omega^2 LC}$$

$$T' = \frac{1}{a + \frac{1 + \omega^2 LC}{b \omega} + d j\omega} = \frac{1}{a + \frac{1}{b \omega} + (d + \frac{L}{b}) j\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{a' = a} \quad \underline{b' = b} \quad d' = d + \frac{L}{b} \frac{C}{C_1 + C_2} R(C_1 + C_2)$$

$$\Rightarrow d' = d + \frac{C}{C_2} (C_1 + C_2) R = R \left[ \frac{C_1 C_2 + C(C_1 + C_2)}{C_2} \right]$$

2) 2)  $C(S_0) = C_0$  on a alors :  $-R_1 + (R_1 + R_2) I' = 0$

$$\Rightarrow I' = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} = \omega_0^2 R \left[ \frac{C_1 * C_2 + C_0(C_1 + C_2)}{LC} \right] = \frac{R(C_1 + C_2)}{LC}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{L} \frac{1}{C_1 C_2 / C_1 + C_2 + C_0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L(C_1 + C_0)}}}$$

2) 3)  $s(t) = S_0 + \varepsilon \cos(\alpha t)$   $C(s) = A s(t)^m$

2) 3) 1)  $\varepsilon \ll S_0$   $C(t) = A (S_0 + \varepsilon \cos \alpha t)^m = A S_0^m \left(1 + \frac{\varepsilon}{S_0} \cos \alpha t\right)^m$   
 $C(t) \approx A S_0^m \left(1 + m \frac{\varepsilon}{S_0} \cos \alpha t\right)$  D.L.

2) 3) 2)  $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{L(C' + C(t))}} = \frac{1}{\sqrt{L(C' + A S_0^m \left(1 + m \frac{\varepsilon}{S_0} \cos \alpha t\right))}}$   
 $= \left(L C' + L A S_0^m \left(1 + m \frac{\varepsilon}{S_0} \cos \alpha t\right)\right)^{-1/2}$   
 $= \frac{1}{\sqrt{L C' + L A S_0^m}} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right) m \frac{A S_0^m}{S_0} \frac{\varepsilon}{K A S_0^m} \cos \alpha t\right)$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L(C' + A S_0^m)}}}$$

$$\Rightarrow \omega(t) = \omega_0 \left[ 1 - \beta \cos \alpha t \right]$$

$$\boxed{\Omega = \alpha}$$

∞