PCSI

98 pts

52 pts

Devoir Surveillé de Thermodynamique

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Toute application numérique, qui ne comportera pas d'unité, ne donnera pas lieu à attribution de points.

Problème I

On notera P, T, V les paramètres pression, température et volume d'un gaz ; on notera respectivement C_p, C_v les capacités calorifiques molaires à pression et à volume constant, et γ le rapport $\gamma = \dfrac{C_p}{C_v}$.

Dans la suite, les systèmes thermodynamiques étudiés seront des gaz parfaits.

.1. Quelques propriétés d'un gaz parfait.

.1.*a*. Rappeler l'équation d'état d'un gaz parfait ; on désignera par *n*, le nombre de moles, et par R la constante molaire des gaz parfaits.

.1.*b*.

.1.*b*.α. Rappeler la relation qui lie la fonction d'état enthalpie H à la fonction d'état énergie interne U.

3 .1.*b*.β. Montrer que (relation de Mayer) $C_p - C_v = R$.

.1.*b*.γ. Exprimer C_v en fonction de R et γ.

.1.*b*.δ. *n* moles d'un gaz parfait évoluent d'un état initial caractérisé par P_0, V_0 jusqu'à un état final caractérisé par P_1, V_1.

Montrer que la variation d'énergie interne de ce gaz parfait au cours de cette transformation peut s'écrire :

$$\Delta U = \frac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma - 1}.$$

.2. **Transformations réversibles d'un gaz parfait.**

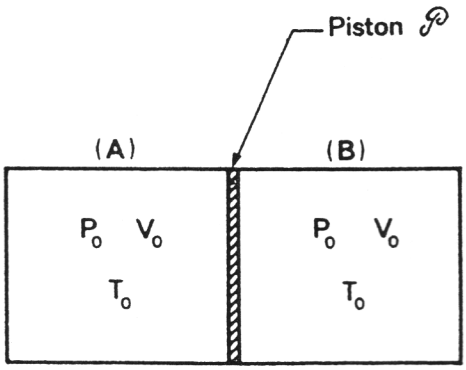


Figure 6

Un cylindre horizontal, de volume invariable, est fermé à ses deux extrémités par deux parois fixes. Ce cylindre est séparé en deux compartiments A et B par un piston $\mathscr{P}$ mobile sans frottements. Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques et de capacités calorifiques négligeables.

Dans l'état initial, les deux compartiments A et B contiennent un même nombre de moles d'un gaz parfait dans le même état P_0, V_0, T_0 (fig. 6).

On chauffe le compartiment A à l'aide d'une résistance électrique jusqu'à un état final où la pression dans le compartiment A est $P_1 = 3P_0$ (fig. 7).

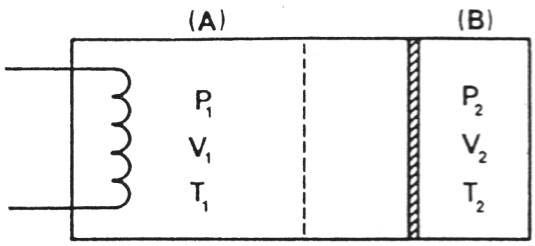


Figure 7

On pourra considérer la suite des états du système comme une suite d'états d'équilibre.

.2.*a.* Calculer :

.2.*a.*α. Pour l'état final du compartiment B :

- la pression P_2,
- le volume V_2,
- la température T_2 ;

.2.*a.*β. Pour l'état final du compartiment A :

- le volume V_1,
- la température T_1.

.2.*b.* On veut déterminer la quantité de chaleur Q_1 fournie par la résistance chauffante au compartiment A.

.2.*b.*α. Montrer que Q_1 s'exprime très facilement en fonction des variations d'énergie interne des gaz des compartiments A et B (respectivement ΔU_1 et ΔU_2).

.2.*b.*β. Donner l'expression de Q_1 en fonction de P_0, V_0 et γ.

.3. **Détente irréversible d'un gaz parfait.**

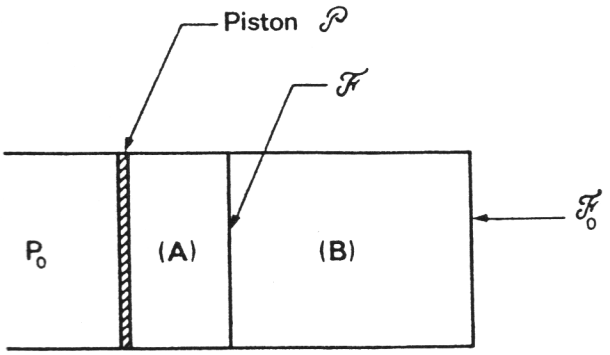


Figure 8

Un cyclindre horizontal est fermé à l'une de ses extrémités par une paroi fixe $\mathscr{F}_0$, et à l'autre extrémité par un piston $\mathscr{P}$ qui peut coulisser sans frottements le long du cylindre.

Le cylindre est séparé en deux compartiments A et B par une paroi fixe $\mathscr{F}$.

Sur la face extérieure du piston s'exerce la pression atmosphérique P_0 qu'on suppose uniforme et constante.

Dans la situation initiale, le compartiment A de volume V_A contient n moles d'un gaz parfait. Le compartiment B de volume V_B est initialement vide (fig. 8).

Les parois du cylindre et le piston sont adiabatiques et de capacités colorifiques négligeables.

.3.*a*. Préciser la pression et la température initiales dans le compartiment A.

.3.*b*. On perce un orifice dans la paroi fixe $\mathscr{F}$ et on cherche à décrire les caractéristiques du nouvel état d'équilibre qu'on supposera atteint.

.3.*b*.α. En analysant qualitativement le problème, montrer que selon la valeur de V_B par rapport à une valeur-seuil V_{B_s} (qu'on ne cherchera pas à déterminer à ce stade de l'étude), deux types de solutions existent ; pour répondre à cette question, on pourra s'intéresser à l'équilibre mécanique du piston dans l'état final.

.3.*b*.β. En supposant que V_B est inférieur à la valeur-seuil, déterminer les caractéristiques P_1, V_1, T_1 du gaz enfermé dans le cylindre A + B quand le nouvel état d'équilibre est atteint ; on exprimera ces grandeurs en fonction de toutes ou de certaines des données P_0, γ, n, V_A, V_B et de R.

.3.*b*.γ. Déterminer la valeur-seuil V_{B_s} en fonction de V_A et de γ.

.3.*b*.δ. On suppose cette fois V_B supérieur à V_{B_s}.
Déterminer P_2, V_2, T_2, du gaz enfermé à l'intérieur du cylindre dans le nouvel état d'équilibre ; on exprimera ces grandeurs en fonction de toutes ou de certaines des données P_0, γ, n, V_A, V_B et de R.

.3.*c*.

.3.*c*.α. Déterminer l'entropie d'un gaz parfait (à une constante près) en fonction de n, C_p, γ, P et V.

.3.*c*.β. En déduire l'expression de la variation d'entropie ΔS_1 du gaz en fonction de n, γ, V_A, V_B et C_p dans le cas où l'état final est celui du C.3.*b*.β.

Ce résultat est-il conforme au second principe de la thermodynamique ?

.3.*c*.γ. Déterminer de la même façon ΔS_2 : l'état final étant celui du C.3.*b*.δ. ; ce résultat est-il conforme au second principe de la thermodynamique ?

PCSI

Correction du Devoir Surveillé de Thermodynamique

Problème I: 1 1.a. $PV = nRT$ 1 1.b.α. $H = U + PV$

3 1.b.β. $\mathcal{C}_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ et $\mathcal{C}_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$ avec : $\mathcal{C}_V = nC_V$ et $\mathcal{C}_P = nC_P$

$H = U + PV \Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial PV}{\partial T}\right)_P$

Pour un gaz parfait : $PV = nRT$ et $U(T) \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_P = \frac{dU}{dT} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \mathcal{C}_V$

$\Rightarrow \mathcal{C}_P = \mathcal{C}_V + nR \overset{\times 1/n}{\Rightarrow} \underline{C_P - C_V = R}$

1 1.b.γ. $C_P = \gamma C_V \Rightarrow \gamma C_V - C_V = R \Rightarrow \underline{C_V = R/\gamma - 1}$

2 1.b.δ. Pour un gaz parfait : $dU = \mathcal{C}_V dT \Rightarrow \Delta U = \int dU = \mathcal{C}_V \Delta T$, $\mathcal{C}_V$ indépendant de T

$\Rightarrow \Delta U = nC_V \Delta T \Rightarrow \Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1} \Delta\left(\frac{PV}{nR}\right)_0^1 \Rightarrow \underline{\Delta U = \frac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma - 1}}$

2.a.α. 1 • Equilibre mécanique $\Rightarrow P_1 = P_2 \Rightarrow \underline{P_2 = 3P_0}$

3 • Nous avons pour (B) une adiabatique réversible

d'où : $P_0V_0^\gamma = P_2V_2^\gamma \Rightarrow V_2^\gamma = \frac{P_0}{P_2} V_0^\gamma$

$\Rightarrow \underline{V_2 = V_0/3^{1/\gamma}}$; $V_2 < V_0$ car $\gamma > 1$.

1+ • GP $\Rightarrow P_2V_2 = nRT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{3P_0V_0}{nR\, 3^{1/\gamma}} \Rightarrow \underline{T_2 = \frac{T_0}{3^{1/\gamma - 1}}}$; $T_2 > T_0$

2.a.β. 1. $V_1 + V_2 = 2V_0 \Rightarrow V_1 = 2V_0 - V_0/3^{1/\gamma} \Rightarrow \underline{V_1 = V_0\left(2 - \frac{1}{3^{1/\gamma}}\right)}$

1+. $P_1V_1 = nRT_1 \Rightarrow T_1 = \frac{3P_0V_0}{nR}\left(2 - 1/3^{1/\gamma}\right)$

$\Rightarrow \underline{T_1 = T_0 \times 3\left(2 - 1/3^{1/\gamma}\right)}$

2 2.b.α. 1er Principe : $\Delta U = W + Q$; parois rigides $\Rightarrow W = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2}_{\text{extensivité de } U} = Q = Q_1 \Rightarrow \underline{Q_1 = \Delta U_1 + \Delta U_2}$

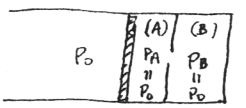
2+ 2.b.β. $Q_1 = nC_V(T_1 - T_0) + nC_V(T_2 - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 + T_2 - 2T_0)$

$\Rightarrow Q_1 = \frac{nR}{\gamma - 1} T_0\left[3\left(2 - 1/3^{1/\gamma}\right) + \frac{1}{3^{1/\gamma - 1}} - 2\right] = \frac{P_0V_0}{\gamma - 1} \Rightarrow \underline{Q_1 = 4\frac{P_0V_0}{\gamma - 1}}$

3.a. • Équilibre mécanique : $\underline{P_A = P_0}$

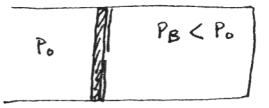
• GP : $P_A V_A = nRT_A \Rightarrow \underline{T_A = \frac{P_0}{nR} V_A}$

3.b.α. $\underline{V_B < V_{Bs}}$:



Équilibre mécanique du piston.

$\underline{V_B > V_{Bs}}$:



P plaqué contre F

3.b.β. • $\underline{P_1 = P_0}$

• 1er principe au système (A)+(B) : $\Delta U = W + Q$

parois et piston adiabatiques $\Rightarrow Q = 0$.

$W = \int -p_{ext}\,dV$; $p_{ext} = p_0 = cste \Rightarrow W = -P_0 \Delta V = -P_0(V_1 - V_A - V_B)$

$$\Rightarrow \Delta U = n C_v \Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_A) = P_0(V_A + V_B - V_1)$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{(\gamma-1)P_0}{nR}\left(V_A + V_B - \frac{nRT_1}{P_0}\right) + P_0\frac{V_A}{nR}$$

$$\Rightarrow \cancel{T_1} = -(\gamma-1)T_1 + \frac{P_0}{nR}\left[(\gamma-1)V_A + \cancel{V_A + (\gamma-1)}V_B\right] \Rightarrow \underline{T_1 = \frac{P_0}{nR}\left(V_A + \frac{\gamma-1}{\gamma}V_B\right)}$$

• GP : $V_1 = \frac{nRT_1}{P_0} \Rightarrow \underline{V_1 = V_A + \frac{\gamma-1}{\gamma}V_B}$

3.b.γ. V_{Bs} / $V_1 = V_B \Rightarrow V_{Bs} = V_A + \frac{\gamma-1}{\gamma}V_{Bs} \Rightarrow \underline{V_{Bs} = \gamma V_A}$

3.b.δ. $\underline{V_B > V_{Bs}}$: • $\underline{V_2 = V_B}$

• $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_A) = -P_0(V_2 - V_A - V_B) = P_0 V_A$

$$\Rightarrow T_2 = T_A + \frac{\gamma-1}{nR}P_0 V_A \Rightarrow T_2 = \frac{P_0 V_A}{nR} + \frac{\gamma-1}{nR}P_0 V_A \Rightarrow \underline{T_2 = \frac{\gamma P_0 V_A}{nR}}$$

• $P_2 V_2 = nRT_2 \Rightarrow P_2 = \cancel{nR}\frac{\gamma P_0 V_A}{\cancel{nR}} \cdot \frac{1}{V_B} \Rightarrow \underline{P_2 = \gamma P_0 \frac{V_A}{V_B}}$

$\boxed{3c\alpha}$ $dU = TdS - PdV \Rightarrow dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV = C_v\frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$; il faut éliminer T au profit de P et V : $PV = nRT \Rightarrow d(PV) = nRdT$

$\Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{1}{nR}\frac{d(PV)}{T} = \frac{1}{nR}\left[\frac{V\,dP}{T} + \frac{P\,dV}{T}\right] = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} \Rightarrow dS = C_v\frac{dP}{P} + C_p\frac{dV}{V} \Rightarrow \underline{S = \frac{nR}{\gamma-1}\left[\ln P + \gamma \ln V\right] + cste}$

Soit : $\Delta S_{I\to F} = \frac{nR}{\gamma-1}\left[\ln\frac{P_F}{P_I} + \gamma\ln\frac{V_F}{V_I}\right] = \frac{nC_p}{\gamma}\ln\left(\frac{P_F V_F^\gamma}{P_I V_I^\gamma}\right)$ $\qquad S = \frac{nC_p}{\gamma}\ln(PV^\gamma) + cste$

$\boxed{3.c.\beta}$ $\Delta S_1 = \frac{nC_p}{\gamma}\ln\left(\frac{P_1 V_1^\gamma}{P_0 V_A^\gamma}\right) = \frac{nC_p}{\gamma}\ln\left(\frac{\frac{\gamma-1}{\gamma}V_B + V_A}{V_A}\right) \times \gamma \Rightarrow \underline{\Delta S_1 = nC_p\ln\left[1 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{V_B}{V_A}\right]}$

$\Delta S_1 = S_{e1} + S_{c1}$, $Q = 0 \Rightarrow S_{e1} = 0 \Rightarrow \Delta S_1 = S_{c1} \geq 0$ (2e principe)

or $\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{V_B}{V_A} > 0 \Rightarrow \Delta S_1 > 0$ ce qui est conforme au second principe, la TF est irréversible

$\boxed{3\text{-}c\gamma}$ $\underline{\Delta S_2} = \frac{nC_p}{\gamma}\ln\left(\frac{\left(\gamma\frac{V_A}{V_B}\right)V_B^\gamma}{P_0\ V_A^\gamma}\right) = \underline{n\frac{C_p}{\gamma}\ln\left(\gamma\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1}\right)}$

$V_B > V_{Bs} = \gamma V_A > V_A$, or $\gamma - 1 > 0 \Rightarrow \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} > 1 \Rightarrow \underline{\Delta S_2 > 0}$

Ce qui est conforme au second principe car : $\Delta S_2 = \underbrace{S_{e2}}_{0} + S_{c2} \geq 0$.