

*Topographie du champ électrostatique.*

- a. Quel est le lien géométrique entre les surfaces équipotentielles et les lignes de champ ?
- b. Peut-il y avoir un extremum local de potentiel dans une zone sans charges ? Pourquoi ?
- c. Les figures 1a et 1b montrent à deux échelles différentes les lignes (orientées par  $\vec{E}$ ) du champ créé par un ensemble de charges ponctuelles. Toutes les charges créant ce champ sont dans le plan de la figure. Au moins un exemple de chaque type de ligne de champ est dessiné. On note  $q$  la valeur de la plus petite (en module) des charges. Les autres valeurs sont des multiples entiers (positifs ou négatifs) de  $q$ . On donne les coordonnées cartésiennes des points A (24a, 75a), B (0, 0), C (24a, -8a), D (75a, 0) où  $a$  est l'unité de longueur. Déterminer d'après ces figures :
  - Que dire de la carte des lignes de champ de la fig 1b ?
  - Point(s) de champ nul ?
  - allure des équipotentielles sur la Fig 1b et 1a.
  - le nombre et la position des charges utilisées ;
  - les valeurs des charges en fonction de  $q$  ;
  - le signe de  $q$ .

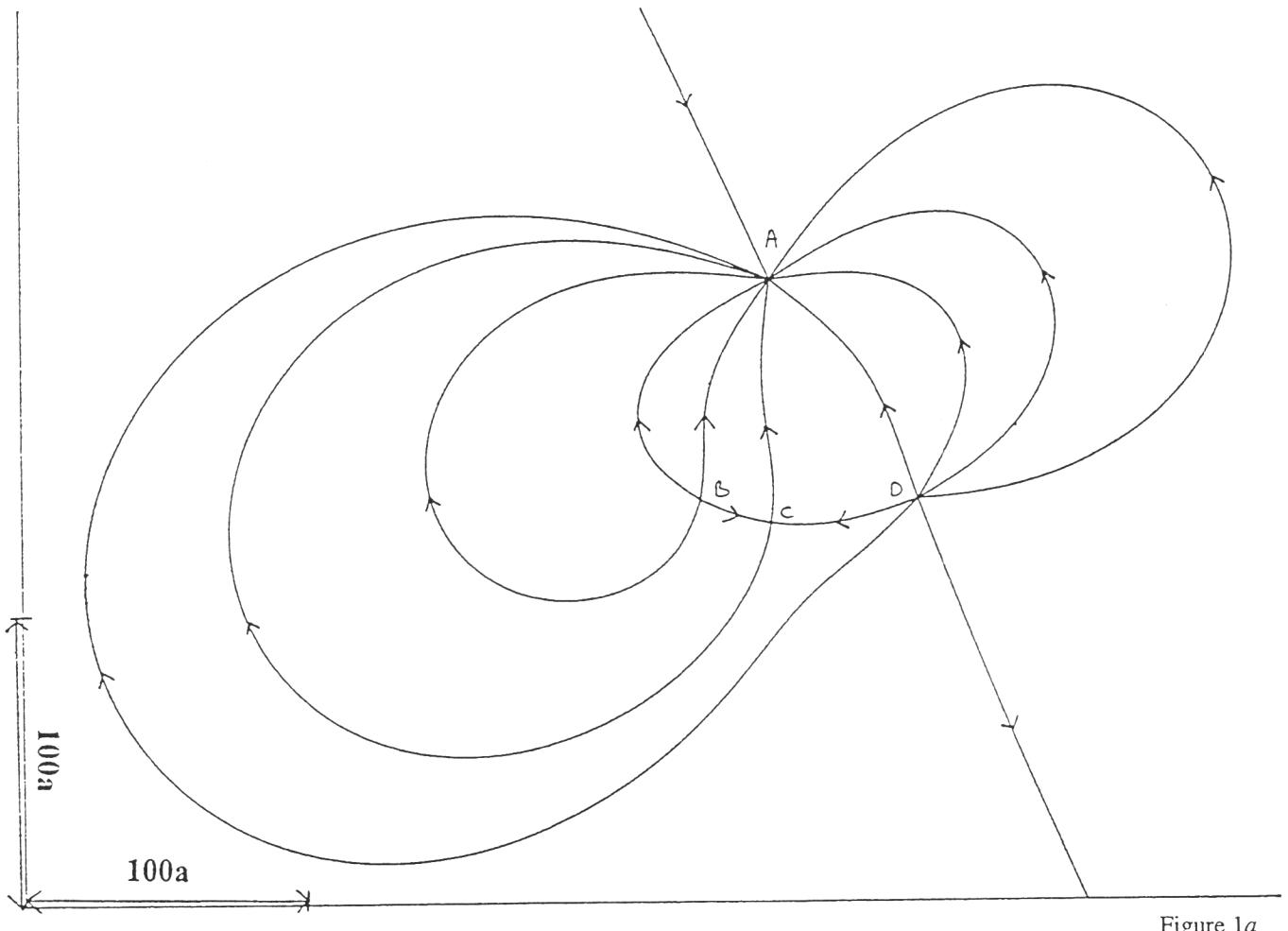


Figure 1a

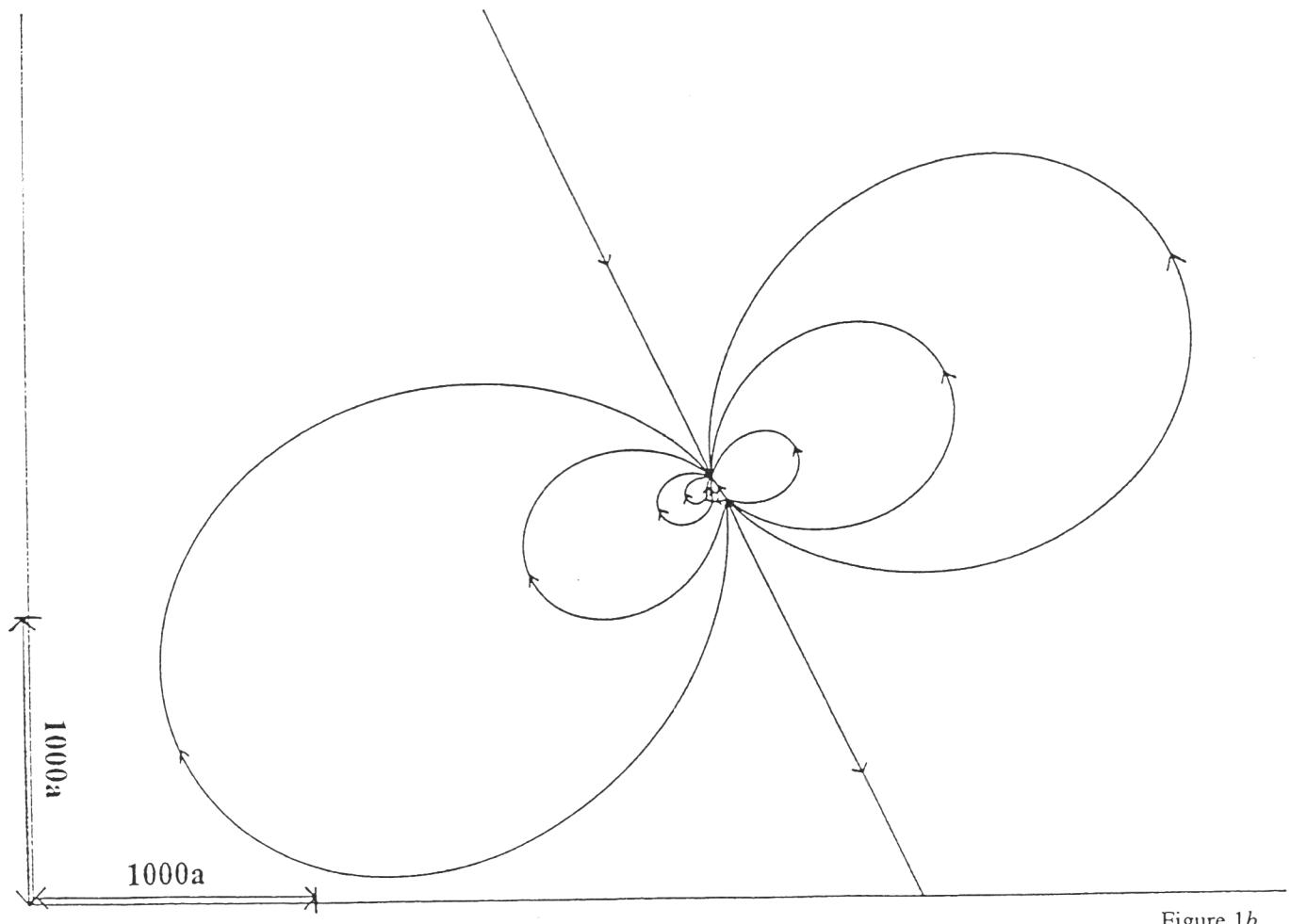


Figure 1b

## PARTIE IV

### ENAC 90

Chaque point M de l'espace étant repéré par la distance r à un point fixe O, il existe en tout point M un potentiel électrostatique :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$$

$$\text{où : } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9 \text{ S. I.}$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$a_0 = 0,53 \text{ Å} \text{ (constante positive, homogène à une longueur).}$$

On se propose dans ce problème de déterminer la distribution de charge qui crée ce potentiel.

III.1. - Déterminer le champ électrostatique  $\vec{E}$  en tout point M de l'espace (direction, sens, module).

III.2. - Calculer, en utilisant le théorème de Gauss, la charge  $q(r)$  contenue dans une sphère de centre O et de rayon r.

III.3. - En déduire en faisant tendre r vers l'infini ou vers 0 :

a) quelle est la charge totale Q contenue dans tout l'espace ;  
b) qu'il y a en 0 une charge ponctuelle que l'on déterminera.

III.4. - Montrer qu'en plus de la charge ponctuelle concentrée en 0, il existe dans tout l'espace une distribution volumique de charges  $\rho(r)$ , non uniforme, que l'on déterminera.

III.5. - Vue la symétrie sphérique de  $V(r)$  et de  $\rho(r)$  on désigne par  $dq$  la valeur de  $r$  que l'on déterminera. Quelle interprétation physique pouvez-vous donner de ce résultat ? (on fera attention au signe de ce minimum).

a) Calculer  $dq$ .

b) Montrer que l'expression  $\frac{dq}{dr}$  passe par un minimum pour une certaine valeur de  $r$  que l'on déterminera. Quelle interprétation physique pouvez-vous donner de ce résultat ? (on fera attention au signe de ce minimum).

III.6. - Démontrer du principe de superposition que le potentiel  $V(r)$  peut être considéré comme la somme algébrique de deux termes  $V_1(r)$  et  $V_2(r)$  où  $V_1(r)$  est le potentiel créé en tout point M de l'espace par la charge ponctuelle placée en 0.

Exprimer  $V_1(r)$  et  $V_2(r)$  et donner la signification physique de  $V_2(r)$ .

## PARTIE V

### ENAC Pilotes 87

I. Dans toute cette partie, on considère un axe de référence ox muni d'un vecteur unitaire  $\hat{x}$  et l'on pose par convention  $V(x=0) = 0$

I.1. Le plan infini  $x = 0$  est uniformément chargé avec une densité surfacique  $\sigma$ . Déterminer en fonction de x le champ  $\vec{E}$ , le potentiel V et tracer l'allure des courbes E(x) et V(x).

I.2. On considère maintenant une distribution volumique uniforme de densité  $\rho$  répartie entre les deux plans infinis, parallèles d'équation respective  $x = a$  et  $x = +a$ .

a) Déterminer en fonction de x le champ  $\vec{E}$ , le potentiel V et tracer l'allure des courbes E(x) et V(x).

b) En faisant tendre a vers 0 avec  $\rho a = C^{tc}$ , montrer que l'on retrouve les expressions de I.1

I.3. Les deux plans infinis parallèles  $x = -a$  et  $x = +a$  sont maintenant chargés superficiellement avec des densités uniformes respectives  $-\sigma$  et  $+\sigma$ . L'espace entre les deux plans ne contient plus de charge.

a) Déterminer en fonction de x le champ  $\vec{E}$  ; caractériser ce champ dans l'espace  $-a < x < +a$ .

b) Calculer la différence de potentiel  $V(a) - V(-a)$ .

II. On considère maintenant un dipole électrostatique formé de deux charges ponctuelles  $-q$  et  $+q$  placées respectivement en  $X = -b$  et  $X = +b$  sur un axe OX muni d'un vecteur unitaire  $\hat{x}$ . L'espace est repéré par rapport à cet axe en coordonnées sphériques  $\rho, \theta, \gamma$ . On désignera par  $\vec{p} = 2q b \hat{\omega}$  le moment dipolaire de ce dipôle.

II.1. Déterminer l'expression approchée du potentiel V créée par ce dipole en un point éloigné, en fonction de  $\rho, \theta$  et  $\gamma$ .

II.2. En déduire les composantes  $E_\rho$  et  $E_\theta$  du champ  $\vec{E}$  créé par ce dipole en un point éloigné.

II.3. Déterminer les équations :

a) des surfaces équipotentielles.

b) des lignes de champ.

II.4. Tracer sur un même schéma l'aspect des équipotentielles et des lignes de champ dans un plan contenant l'axe OX

Partie III: a. les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champs.

$$\text{En effet : } \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = -dV \quad \text{Sur une équipotentielle : } dV=0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$$

b. Voir. Si nous avons un système de potentiel, au voisinage de ce point nous avons :



D'après le théorème de Gauss nous avons donc une charge à l'intérieur de S.

cela nous offre d'un dipôle électrostatique  $\Rightarrow \sum q_i = 0$

- C'est un point de champ nul ( $\Delta$ : A, B, D sont des points où se situent des charges, le champ n'y est pas défini, ce ne sont pas des pts de champ nul !)

- Voir la figure.

- Points où les lignes de champ convergent : A, B, D  
 $q_A < 0$  et  $q_B, q_D > 0$  (3 charges)

D'après la fig. 1b le dipôle est environ orienté selon (AD).

$$\text{Dipôle} \Rightarrow \frac{q_A + q_B + q_D}{|q_A|, |q_D|} = 0 \quad \text{voit : } |q_A| = |q_B| + |q_D|$$

Orientation selon (AD)  $\Rightarrow |q_D| > |q_B|$

$$\Rightarrow |q_B| = q_D = q \quad \text{avec : } \boxed{q > 0}$$

Pour déterminer la valeur de q par rapport à  $q_B$  nous allons utiliser la position du point de champ et le fait que nous avons des multiples entiers de q :

$$\Rightarrow |\vec{E}_B(c)| \approx |\vec{E}_0(c)| \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2(24^2+8^2)} = \frac{q_D}{4\pi\epsilon_0 a^2((35^2+8^2))} = \frac{q_D}{4\pi\epsilon_0 a^2((75^2+8^2))}$$

$$\Rightarrow q_D \approx 4,6 q \Rightarrow \boxed{q_D = 4q}$$

# de 4 car en fait B, C et D ne sont pas strictement alignés.

$$\boxed{q_B = q} \quad \text{et} \quad \boxed{q_A = -5q}$$

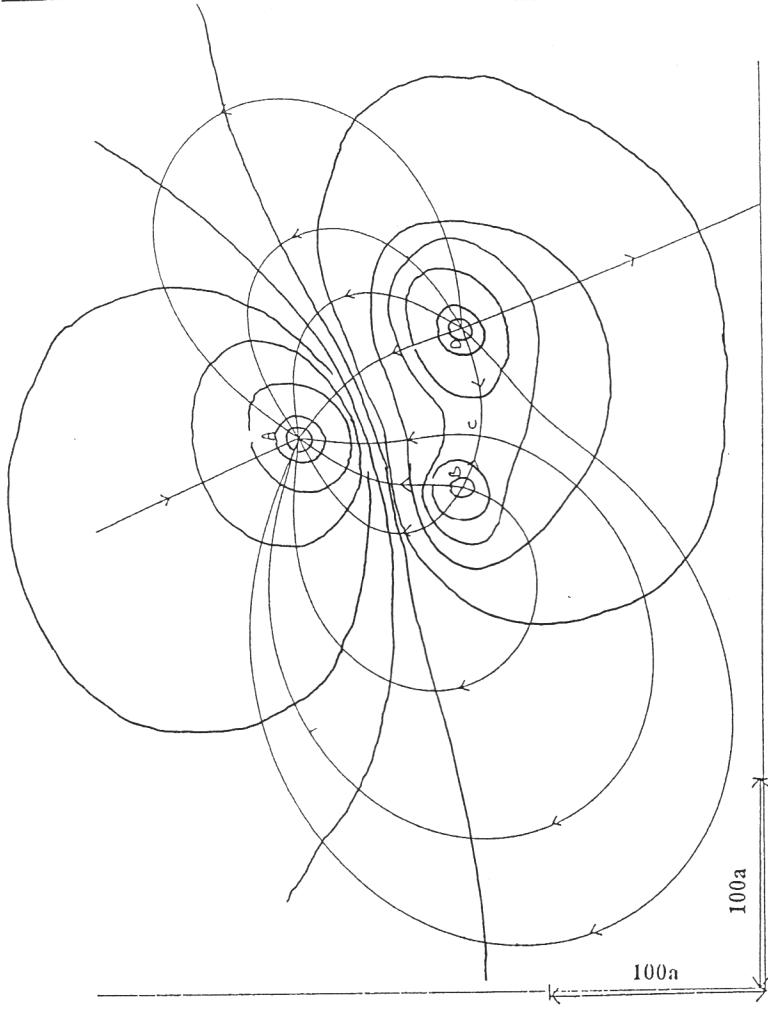


Figure 1a

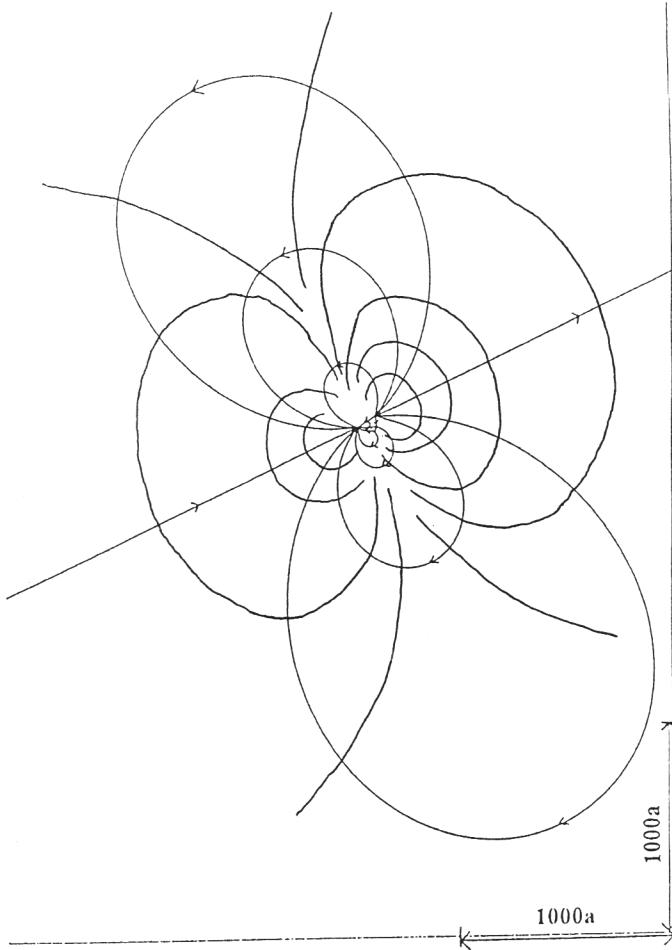


Figure 1b