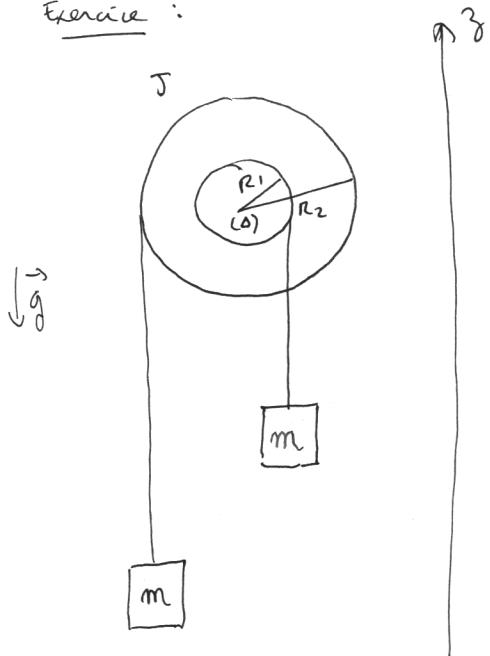


Exercice :



Déterminez  $\ddot{\vartheta}_1$  et  $\ddot{\vartheta}_2$  en fonction des données.

J : moment d'inertie par rapport à O

correction : théorème du moment cinétique par rapport à un axe fixe:

$$f = f(M_1, R_2, \text{pondre}, g, \ddot{\vartheta})$$

$$\frac{d\omega}{dt} = M_0(\vec{F}_{\text{ext}})$$

$$\omega' = \omega_0(R_1) + \omega_0(R_2) + \omega_0(\text{pondre}) + \omega_0(\text{fil}) \quad ; \quad \omega_0(\text{fil}) = 0 \text{ car fil de masse négligeable.}$$

$$\vec{\omega}_0(R_1) = \vec{\omega}_0(R_1) \times \vec{m} \cdot \vec{v}_1 = (\vec{\omega}_0(R_1) + \vec{\omega}_0(R_2)) \times \vec{m} \cdot \vec{v}_1 = R_1 m \dot{\vartheta}_1 \vec{u}_0 \quad ; \quad \omega_0(R_2) = -R_2 m \dot{\vartheta}_2$$

$$\omega_0(R_1) = R_1 m \dot{\vartheta}_1$$

$$\omega_0(\text{pondre}) = J \omega = J \ddot{\vartheta} \Rightarrow \omega'_0 = m(R_1 \dot{\vartheta}_1 - R_2 \dot{\vartheta}_2) + J \ddot{\vartheta}$$

$$M_{0,\text{ext}} = M_0(\vec{P}_1) + M_0(\vec{P}_2) + M_0(\vec{R}) = mg R_2 - mg R_1 + 0 = mg(R_2 - R_1)$$

$$\text{qd } \dot{\vartheta}_1 > 0 \Rightarrow d\dot{\vartheta}_1 = R_1 d\vartheta \text{ et } d\dot{\vartheta}_2 = -R_2 d\vartheta$$

$$\begin{cases} \dot{\vartheta}_1 = R_1 \dot{\vartheta} \\ \dot{\vartheta}_2 = -R_2 \dot{\vartheta} \end{cases} \quad \dot{\vartheta}_1 = -\frac{R_2}{R_1} \dot{\vartheta}_2$$

$$\frac{d\omega}{dt} = m(R_1 \dot{\vartheta}_1 - R_2 \dot{\vartheta}_2) + J \ddot{\vartheta} = m(R_1 \dot{\vartheta}_1 + R_2 \frac{R_2}{R_1} \dot{\vartheta}_1) + J \frac{\dot{\vartheta}_1}{R_1} = mg(R_2 - R_1)$$

$$\Rightarrow \ddot{\vartheta}_1 = g \frac{R_2 - R_1}{\frac{1}{J}(R_1^2 + R_2^2 + J/m)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{\vartheta}_1 = g \frac{R_1(R_2 - R_1)}{R_1^2 + R_2^2 + J/m}}$$

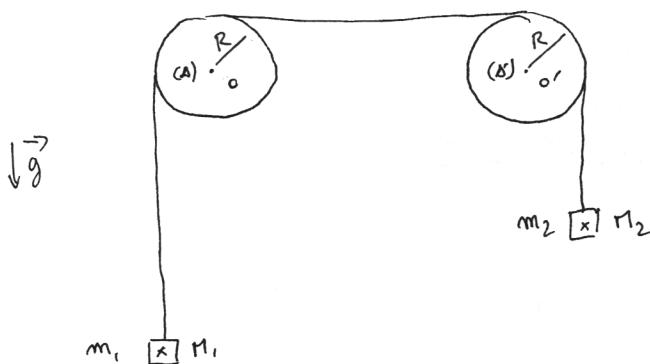
et

$$\boxed{\ddot{\vartheta}_2 = -g \frac{R_2(R_2 - R_1)}{R_1^2 + R_2^2 + J/m}}$$

Exercice :

$$OO' = L$$

$$\ddot{\gamma}(0) = \ddot{\gamma}(0')$$



1) Les poulies sont supposées de masses nulles.

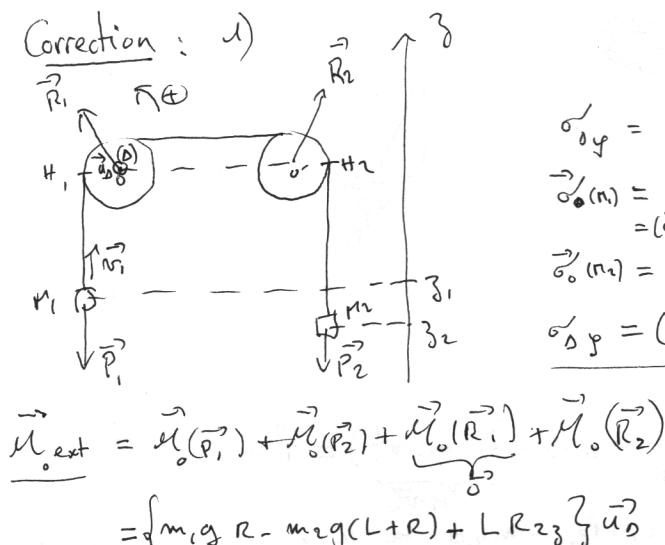
Déterminez  $\ddot{\gamma}_1$ .

2) Poulies cylindriques, lourdes de rayons R et masses

Déterminez  $\ddot{\gamma}_1$ .

Poulies identiques.

Correction : 1)

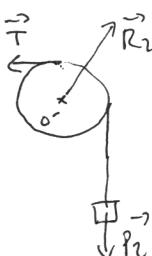


$$y = \{r_1, r_2, \text{Poulie}_1, \text{Poulie}_2, \text{fil}\}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\sigma}_{\text{dyn}} &= \ddot{\sigma}_o(m_1) + \ddot{\sigma}_o(m_2) + \underbrace{\ddot{\sigma}_o + \ddot{\sigma}_o + \ddot{\sigma}_o}_{\text{masses nulles}} \\ \ddot{\sigma}_o(m_i) &= \vec{\omega}_o \wedge m_i \vec{v}_i \\ &= (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \wedge m_i \ddot{\gamma}_i = -R m_i \ddot{\gamma}_i \vec{u}_o \\ \ddot{\sigma}_o(m_2) &= \vec{\omega}_2 \wedge m_2 \ddot{\gamma}_2 + \vec{\omega}_1 \wedge m_2 \ddot{\gamma}_2 = +(R+L)m_2 \ddot{\gamma}_2 \vec{u}_o \\ \ddot{\sigma}_{\text{dyn}} &= (R+L)m_2 \ddot{\gamma}_2 - Rm_1 \ddot{\gamma}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_o(\vec{P}_1) &= m_1 g R \vec{u}_o \\ \vec{M}_o(\vec{P}_2) &= m_2 g (L+R) \vec{u}_o \\ \vec{M}_o(\vec{R}_2) &= \vec{\omega}_2 \wedge \vec{R}_2 = \vec{\omega}_2 \wedge \vec{P}_2 \\ &= -m_2 g (L+R) \vec{u}_o \\ \vec{M}_o(\vec{R}_2) &= \vec{\omega}_1 \wedge \vec{R}_2 \\ &= L R_2 \ddot{\gamma}_2 \vec{u}_o \end{aligned}$$

→ Que vaut  $R_{23}$ ? Considérons le sous système  $\mathcal{Y}_2 = \{ \text{Poulie}_2, \text{fil}_2 \}$



Appliquons le théorème de la quantité de mouvement :  $\frac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{R}_{\text{ext}}$

$$\vec{P}_2 = m_2 \vec{v}_2 + \sum_{\text{Poulies}} m_i \vec{v}_i \quad \ddot{\gamma}_2 = \ddot{\gamma}_2 + R_{23} - m_2 g$$

car  $m_1 = 0$

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}_2 &= \ddot{\gamma}_2 + R_{23} - m_2 g \\ R_{23} &= m_2 (\ddot{\gamma}_2 + g) \end{aligned}$$

→ fil inextensible :  $\ell = \text{const} = -\ddot{\gamma}_1 + \frac{\pi}{2} R + L + \frac{\pi}{2} R - \ddot{\gamma}_2 \Rightarrow \ddot{\gamma}_1 = -\ddot{\gamma}_2$

donc :

$$\frac{d\ddot{\sigma}_o}{dt} = M_{\text{ext}} \Rightarrow (- (R+L)m_2 - Rm_1) \ddot{\gamma}_1 = m_2 g R - m_2 g (L+R) + L (\ddot{\gamma}_2 + g) m_2$$

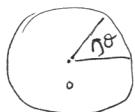
$$\ddot{\gamma}_1 = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}$$

idem qu'avec une seule poulie.  
L n'intervient pas.

↳

$$2) \quad J = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\sigma'_o (\text{Poulie 1}) = J \ddot{\theta}$$



$$\begin{aligned}
 \vec{\sigma}'_o (\text{Poulie 2}) &= \sum_i \vec{O} \vec{m}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{o} \vec{m}_i \wedge (m_i \vec{w} \wedge \vec{m}_i) \\
 &= \vec{o} \vec{m}_i \wedge \underbrace{(\vec{w} \wedge \sum_i m_i \vec{m}_i)}_{M \vec{w}} \quad G = o' \\
 &\quad + J \vec{w} \quad \vec{w} = \vec{w}' \\
 &= M \vec{o} \vec{m}_i \wedge (\vec{w} \wedge \vec{o} \vec{m}_i) + J \vec{w} \\
 &= M \left[ \vec{w} (\vec{o} \vec{m}_i \cdot \vec{o} \vec{m}_i) - \vec{o} \vec{m}_i (\vec{w} \cdot \vec{o} \vec{m}_i) \right] + J \vec{w} \\
 &= (M L^2 + J) \vec{w}
 \end{aligned}$$

$$d\vec{\sigma}_o \vec{\sigma}'_o = (R+L)m_2 \ddot{\gamma}_2 - R m_1 \ddot{\gamma}_1 + J \ddot{\theta} + (M L^2 + J) \ddot{\theta}$$

or :  $\ddot{\gamma}_2 = -\ddot{\gamma}_1$  et  $\ddot{\gamma}_1 = -R \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}'_o = \left[ -(R+L)m_2 - R m_1 - \frac{2J}{R} - \frac{ML^2}{R} \right] \ddot{\gamma}_1$$

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{\text{ext}} &= \vec{M}_o(\vec{R}_1) + \vec{M}_o(\vec{P}_{p_1}) + \vec{M}_o(\vec{P}_1) \\
 &\quad + \vec{M}_o(\vec{R}_2 + \vec{P}_{p_2}) \\
 &\quad + \vec{M}_o(\vec{P}_2)
 \end{aligned}$$

$$\vec{M}_o(\vec{R}_2 + \vec{P}_{p_2}) = \frac{L}{R} \times (R_2 \ddot{\gamma}_2 + P_{p_2}) \vec{u}_o ; \quad P_{p_2} < 0$$

Théorème de la quantité de mouvement à  $\mathcal{S}_2$  :  $\frac{d}{dt} (m_2 \vec{v}_2 + \sum_i m_i \vec{v}_i) = \vec{T} + \vec{R}_2 + \vec{P}_{p_2} + \vec{P}_2$

Selon  $\vec{u}_2$  :  $m_2 \ddot{\gamma}_2 + m \ddot{\alpha}_G = 0 + R_2 \ddot{\gamma}_2 + P_{p_2} - m_2 g = R_2 \ddot{\gamma}_2 + P_{p_2} = m_2 (\ddot{\gamma}_2 + g)$

$$M_{\text{ext}} = m_2 g R + L m_2 (\ddot{\gamma}_2 + g) - m_2 g (L + R)$$

$$\frac{d \sigma_o}{dt} = M_{\text{ext}} \Rightarrow \left[ -(R+L)m_2 - R m_1 - \frac{2J}{R} - \frac{ML^2}{R} \right] \ddot{\gamma}_1 = m_2 g R + L m_2 (\ddot{\gamma}_2 + g) - m_2 g (L + R)$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma}_1 = g \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + M(1 + \frac{L^2}{R^2})}$$

intervention de  $L$ ,  
+ de 2 poulies coaxiales.  
( $L = 0$ )

