PCSI

# DS de Physique

Le 9 mars 2002

2h

**. Choc entre pendules**

Soient 2 pendules simples $(m_1, \ell)$ et $(m_2, \ell)$ (Fig. 10).

À l'instant $t = 0$, on lâche les pendules avec les conditions initiales suivantes :
$\theta_{10}$, $\theta_{20} = -\theta_{10}$, $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ ;
$\theta_{10}$ est supposé petit.

**a)** À quel instant $t_1$, et en quel point, a lieu le premier choc entre $M_1$ et $M_2$ ? (choc élastique).

**b)** Calculer les vitesses $\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$ de $M_1$ et $M_2$ après le choc, et en déduire les élongations angulaires $\theta'_{10}$ et $\theta'_{20}$ des pendules (déviations angulaires maximales) après ce choc.

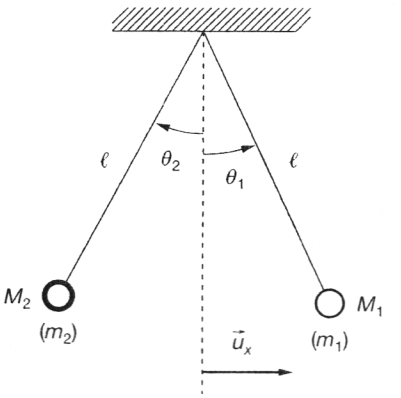



Fig. 10

## Mouvement des comètes

1) Une comète décrit une orbite elliptique autour du soleil, qui occupe un foyer de l'ellipse, avec une période $T = 11{,}5$ années. La distance du périgée au soleil est $r_P = 0{,}2$ u.A. (l'unité astronomique u.A., a pour valeur la distance moyenne de la terre au soleil, soit 150 millions de km).

Calculer

*a)* la distance $r_A$ de l'apogée au soleil ;
*b)* l'excentricité de la trajectoire elliptique.

On donne période du mouvement de la terre autour du soleil $T_0 = 1$ an.

2) La trajectoire de la comète est pratiquement confondue avec une parabole. Comparer la vitesse $v_P$ de la comète au périgée, à la vitesse $v_0$ de translation de la terre autour du soleil.

PCSI

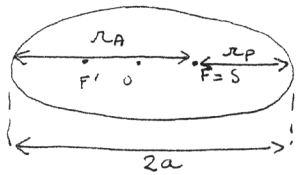
# Correction

# DS de Physique

9 mars 2002

## Mouvement des comètes

1)




a) $2a = r_A + r_P$ ; $a = \frac{r_A + r_P}{2}$

3ème loi de Kepler : $\frac{a^3}{T^2} = cste$

La constante est la même pour tous les astres gravitant autour du Soleil, tant que leur masse reste faible devant la sienne.

$\Rightarrow \underbrace{\frac{a^3}{T^2}}_{\text{comète}} = \underbrace{\frac{a_0^3}{T_0^2}}_{\text{Terre}}$ ; $a_0 = 1\,ua$, $\Rightarrow a = a_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2/3}$

$$\Rightarrow \boxed{r_A = 2a_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2/3} - r_P}$$

AN : $r_A = 2 \times 1 \times \left(\frac{11,5}{1}\right)^{2/3} - 0,2 \Rightarrow \boxed{r_A \simeq 10\ u.a.}$

b) $r = \frac{p}{1+e\cos\theta} \Rightarrow r_P = \frac{p}{1+e}$ ; $r_A = \frac{p}{1-e} \Rightarrow r_P(1+e) = r_A(1-e)$

$\Rightarrow r_P + r_P e = r_A - r_A e \Rightarrow \boxed{e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}}$ AN : $\boxed{e = 0,95}$

2) e est proche de 1, il est alors légitime de confondre la traj. avec celle d'une parabole près du périhélie $\Rightarrow$ $E_m \simeq 0$

$E_m \simeq 0 = \frac{1}{2}\cancel{m} v_P^2 - \frac{G\cancel{m}M_S}{r_P}$

$\Rightarrow v_P = \sqrt{\frac{2GM_S}{r_P}}$ ; RFD appliquée à la Terre : $\cancel{m}\frac{v_0^2}{a_0} = G\frac{\cancel{m}M_S}{a_0^2}$

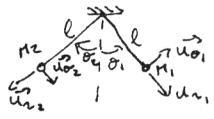
$\Rightarrow GM_S = v_0^2 a_0$

$$\Rightarrow \boxed{v_P = v_0\sqrt{\frac{2a_0}{r_P}}}$$

AN : $v_P \simeq v_0\sqrt{\frac{2\times 1}{0,2}} = v_0\sqrt{10} \Rightarrow \boxed{v_P \simeq 3,2\,v_0}$

Choc entre pendules : a) 3 étapes $\rightarrow$ ① A partir des conditions initiales données dans l'énoncé les pendules évoluent indépendamments jusqu'à se rencontrer ② choc, redistribution des vitesses ③ A nouveau évolutions séparées, les pendules atteignent leurs amplitudes maximales $\theta_{10}$ et $\theta'_{20}$.

① Equation du mouvement pour chaque pendule : $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta)$




$\vec{v} = l\dot\theta\vec{u}_\theta$, $\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 + mgl(1-\cos\theta)$

$E_m = cste \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}l^{\cancel{2}}\cancel{2}\dot\theta\ddot\theta + \cancel{m}gl\sin\theta\,\dot\theta = 0$

$\Rightarrow$ la masse s'élimine $\Rightarrow$ mvt du pendule indépendant de sa masse. $\Rightarrow \ddot\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \overset{\theta \ll 1}{\Rightarrow} \ddot\theta + \frac{g}{l}\theta = 0$

$\begin{cases} m_1 : \ddot\theta_1 + \frac{g}{l}\theta_1 = 0 \\ m_2 : \ddot\theta_2 + \frac{g}{l}\theta_2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ on a la même équation du mvt, seules les CI changent

$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$\begin{cases} \theta_1(t) = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ \theta_2(t) = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$ $\begin{cases} \dot\theta_1(t) = -A_1\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_1) \\ \dot\theta_2(t) = -A_2\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$

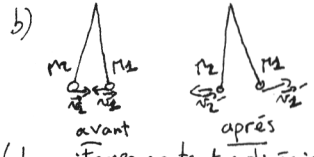
CI $\Rightarrow \theta_1(t=0) = \theta_{10} = A_1\cos\varphi_1$, $\dot\theta_1(t=0) = 0 = -A_1\omega_0\sin\varphi_1 \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = 0 \text{ ou } \pi}$

$\varphi_1 = 0 \Rightarrow A_1 = \theta_{10} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1(t) = \theta_{10}\cos\omega_0 t \\ \theta_2(t) = \theta_{20}\cos\omega_0 t = -\theta_{10}\cos\omega_0 t \end{cases}$

de même

② choc : $\theta_1(t_{choc}) = \theta_2(t_{choc}) \Rightarrow \cos\omega_0 t_{choc} = 0 \Rightarrow \omega_0 t_{choc} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t_{choc} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} = T/4}$

b)




(Les vitesses restent colinéaires choc bref)

$\begin{cases} \vec{v}_1 = l\dot\theta_1\vec{u}_{\theta_1} \\ \vec{v}_2 = l\dot\theta_2\vec{u}_{\theta_2} \end{cases}$ en $\theta = 0$ $\vec{u}_{\theta_1} = \vec{u}_{\theta_2} = \vec{u}_x$

$\vec{v}_1 = l\theta_{10}(-\omega_0)\sin\omega_0 t\,\vec{u}_x$, en $\theta = 0$, $\omega_0 t = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = -l\theta_{10}\omega_0\vec{u}_x \Rightarrow \begin{cases} v_1 = -l\theta_{10}\omega_0 \\ v_2 = l\theta_{20}\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{v_2 = -v_1}$

de même

Conservation de la quantité de mvt et de l'énergie cinétique : choc élastique

$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \end{cases}$ $\Rightarrow (m_2 - m_1)v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$

$\overset{\text{d'où}}{\Rightarrow} v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$

$\Rightarrow v_1' = 2v_2 + v_2'$

$\Rightarrow (m_2 - m_1)v_2 = 2m_1v_2 + m_1v_2' + m_2v_2' \Rightarrow \boxed{v_2' = \frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2}v_2}$

③ en $t' = t - \frac{T}{4}$ nous avons : CI $\theta_2'(t'=0) = 0$ ; $\dot\theta_2'(t'=0) = v_2'/l$

$\theta_2' = A_2'\cos(\omega_0 t' + \varphi_2') \Rightarrow \dot\theta_2'(t') = \frac{v_2'}{l}\cos(\omega_0 t')$ et $\theta_2'(t') = \frac{v_2'}{l\omega_0}\sin(\omega_0 t')$

$\theta_{02}' = \theta_2'(t' = \frac{T}{4}) = \frac{v_2'}{l\omega_0} \Rightarrow \boxed{\theta_{02}' = \frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2}\theta_{01}}$

par inversion d'indices :

$$\boxed{\theta_{01}' = \frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\theta_{01}}$$