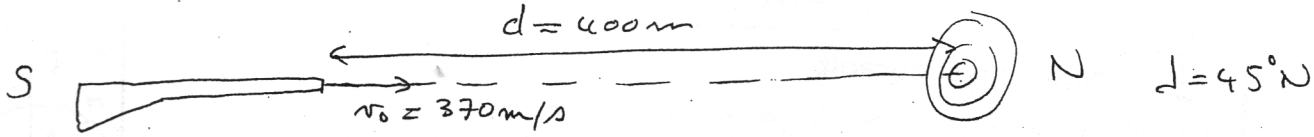
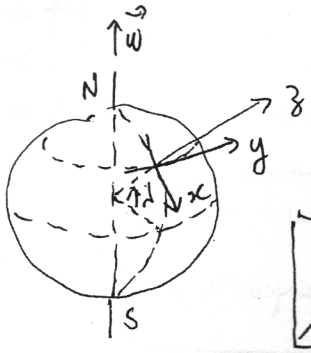
Coriolis

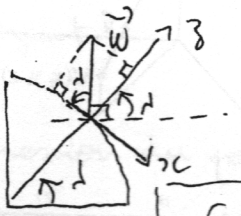
Tir du Sud vers le Nord



$$\vec{P} = mg\vec{u_z} \qquad \vec{F_{ic}} = -m\vec{a_c} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}$$

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_{ic}}$$





$$\vec{\omega}\begin{pmatrix}-\omega\cos\lambda\\0\\\omega\sin\lambda\end{pmatrix}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\omega\sin\lambda\,\dot{y}\\\omega\sin\lambda\,\dot{x}+\omega\cos\lambda\,\dot{z}\\-\omega\cos\lambda\,\dot{y}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases}\ddot{x} = 2\omega\sin\lambda\,\dot{y}\\ \ddot{y} = -2\omega\sin\lambda\,\dot{x} - 2\omega\cos\lambda\,\dot{z}\\ \ddot{z} = -g + 2\omega\cos\lambda\,\dot{y}\end{cases}}$$

<u>Ordre zéro</u> : absence de la force de Coriolis (négligeable)

$$\begin{cases}\ddot{x}_{(0)}(t) = 0\\ \ddot{y}_{(0)}(t) = 0\\ \ddot{z}_{(0)}(t) = -g\end{cases} \quad \begin{cases}\dot{x}_{(0)}(t) = -v_0\\ \dot{y}_{(0)}(t) = 0\\ \dot{z}_{(0)}(t) = -gt\end{cases} \quad \begin{cases}x_{(0)}(t) = -v_0 t\\ y_{(0)}(t) = 0\\ z_{(0)}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

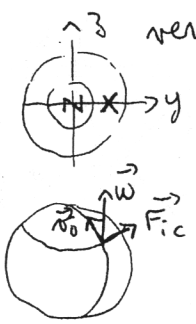
<u>Ordre un</u> :

$$\begin{cases}\ddot{x}_{(1)} = 2\omega\sin\lambda\,\dot{y}_{(0)}\\ \ddot{y}_{(1)} = -2\omega\sin\lambda\,\dot{x}_{(0)} - 2\omega\cos\lambda\,\dot{z}_{(0)}\\ \ddot{z}_{(1)} = -g + 2\omega\cos\lambda\,\dot{y}_{(0)}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{x}_{(1)} = 0\\ \ddot{y}_{(1)} = 2\omega v_0\sin\lambda + 2g\omega\cos\lambda\, t\\ \ddot{z}_{(1)} = -g\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{x}_{(1)}(t) = -v_0\\ \dot{y}_{(1)}(t) = 2\omega v_0\sin\lambda\, t + g\omega\cos\lambda\, t^2\\ \dot{z}_{(1)}(t) = -gt\end{cases} \quad \begin{cases}x_{(1)}(t) = -v_0 t\\ y_{(1)}(t) = \omega v_0\sin\lambda\, t^2 + \frac{1}{3}g\omega\cos\lambda\, t^3\\ z_{(1)}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ pas d'influence de Coriolis selon z, seulement selon $y > 0$: vers l'Est. Au moment de l'impact : $x_{(1)}(t_F) = -d = -v_0 t_F$

$t_F = d/v_0$



$$\Rightarrow y_F = \omega v_0\sin\lambda\,\frac{d^2}{v_0^2} + \underbrace{\frac{1}{3}g\omega\cos\lambda\,\frac{d^3}{v_0^3}}_{\substack{0{,}2\text{ mm}\\ \text{négligeable}\\ \text{devant}\\ \text{l'autre terme}}}$$

$$y_F = \omega\sin\lambda\,\frac{d^2}{v_0}$$

$$\| \; y_F = 2{,}2\text{ cm}$$

5 * Pendule de Foucault

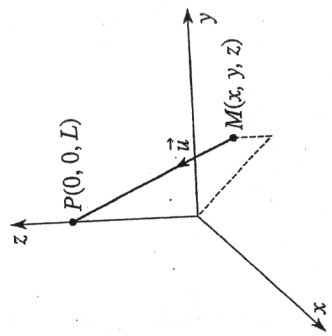
D'après Mines d'Alès, 1990.

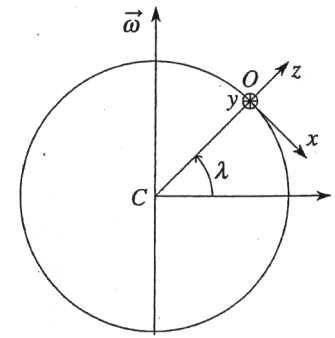
Un pendule simple de longueur L est attaché au point P de coordonnées $(0, 0, L)$ dans le référentiel terrestre local $\mathcal{R}_T$ d'un point O, situé à la surface de la Terre en un lieu de latitude λ. Au point M, est attachée une masse ponctuelle m.

À un instant donné, le pendule oscille dans un plan quelconque.

On pose $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{MP}}{MP}$, avec $MP = L$, module de $\overrightarrow{MP}$.

On appelle ω la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. Enfin, on définit dans cet exercice le référentiel terrestre local au point O de la façon suivante : l'axe (Oz) passe par le centre de la Terre, l'axe (Ox) est tangent au méridien en O et dirigé vers le sud, l'axe (Oy) est tangent au parallèle en O et dirigé vers l'est.





1) a) On appelle $\vec{T}$ la tension du fil en M. On pose $\vec{T} = T\vec{u}$. Donner les trois composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base (x, y, z). En déduire celles de $\vec{T}$ en fonction de T (module de $\vec{T}$), x, y et L. On admettra que $z << L$.

b) Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée au point M, dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$.

2) En négligeant la force d'inertie de Coriolis et en admettant que z reste constant, déterminer les deux équations simples vérifiées par $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$. On posera $\omega_0^2 = \dfrac{g}{L}$.

3) a) En tenant compte de la force d'inertie de Coriolis, mais en gardant pour T la valeur trouvée à la question précédente (après l'avoir justifié), déterminer les équations en $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$.

b) Poser $\eta = x + iy$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par η.

4) On désire obtenir les équations du mouvement du point M dans le repère $(O\,;x',y',z')$ d'axe (Oz') confondu avec (Oz) et tournant autour de (Oz) avec la vitesse angulaire constante $\Omega = \omega \sin\lambda$. On fait donc le changement de variable : $\eta = \eta' \exp(-i\Omega t)$, où $\eta' = x' + iy'$.

a) Écrire l'équation différentielle vérifiée par η'.

b) Montrer que $\Omega^2 << \omega_0^2$ (on introduira les valeurs numériques nécessaires et on prendra $L = 67$ m).

c) En déduire alors l'expression de $\eta'(t)$, les conditions initiales étant :

$$x(t=0) = x'(t=0) = x_0\,; \quad y(t=0) = y'(t=0) = 0\,; \quad \dot{x}(t=0) = 0\,; \quad \dot{y}(t=0) = 0\,.$$

d) En déduire que dans le repère $(O\,;x',y',z')$ la trajectoire de M est une ellipse. Calculer le rapport $\dfrac{b}{a}$ du demi-petit axe et du demi-grand axe de cette ellipse en un lieu de latitude 45° nord. Commenter. Calculer b si $x_0 = 3$ m.

e) Déduire de ce qui précède le mouvement du pendule dans le référentiel $\mathcal{R}_T$. Calculer en particulier la valeur numérique de Ω.

POINT DE DÉPART

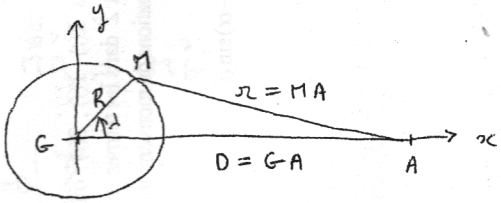
2) Le référentiel terrestre n'est pas galiléen. La force d'inertie d'entraînement est incluse dans le poids.

3) Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur les trois axes. Ne garder que les deux termes prépondérants dans la troisième équation (projection sur (Oz)).

4) Exprimer $\dot{\eta}$ et $\ddot{\eta}$ en fonction de η', $\dot{\eta}'$ et $\ddot{\eta}'$, puis remplacer dans l'équation différentielle vérifiée par η pour obtenir une équation (simple) en η'. Utiliser ces calculs pour déterminer les valeurs initiales de η' et de sa dérivée.

Le potentiel de marée

Nous considérons un modèle statique des masses océaniques.



M : point matériel de masse m.

m_A : masse de l'astre exerçant la force de marée.

1) Exprimez dans la base cartésienne la force de marée en un point M quelconque à la surface de la Terre.

2) Simplifiez cette expression dans le cas où $D \gg R$.

3) Déterminez l'expression du potentiel de marée V_m pour $D \gg R$.

4) " " " potentiel de pesanteur V_p.

5) A l'équilibre, modèle statique, la surface des masses océaniques est selon les équipotentielles. Montrez que dans le repère (G x y) la surface des océans épouse une ellipse dont on donnera les caractéristiques.

6) Nous apelons marnage la différence de hauteur des eaux entre la marée basse et haute.
Donnez l'expression du marnage Δh en fonction de m_A, m_T (masse de la Terre), R, D.

7) Applications numériques : Calculer le marnage dû à la Lune, le Soleil et leur actions conjuguées maximales.

8) Expliquez pourquoi ce modèle fonctionne correctement pour des îlots isolés du Pacifique.

9) Quel serait le marnage sur Titan ?

∽

et enfin $\begin{cases} X = 0 \\ Y = -\dfrac{g}{2}t^2 \sin\alpha \\ R = mg\cos\alpha \,. \end{cases}$

rdre 1, pour obtenir les lois $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, on te les expressions de $\dot{X}$, $\dot{Y}$ et $\dot{Z}$ dans les termes en nc du premier ordre) des équations du mouvement. btient alors :

$$\begin{cases} \ddot{X} = -2gt\Omega\sin(\lambda-\alpha)\sin\alpha \\ \ddot{Y} = -g\sin\alpha \\ 0 = -mg\cos\alpha + R \,. \end{cases}$$

mière équation redonne $R = mg\cos\alpha$. L'équation est inchangée donc, au premier ordre en Ω,

$gt\sin\alpha$ et $Y = -\dfrac{g}{2}t^2\sin\alpha$.

ation en X donne $\dot{X} = -gt^2\Omega\sin(\lambda-\alpha)\sin\alpha$,

$X = -\dfrac{gt^3}{3}\Omega\sin(\lambda-\alpha)\sin\alpha$.

d l'objet arrive au point B, $Y = l$, donc :

$$t = t_f = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}}\,.$$

vecteur vitesse du point est, au premier ordre :

$\vec{v} = -2l\Omega\sin(\lambda-\alpha)\vec{e}_X - \sqrt{2gl\sin\alpha}\,\vec{e}_Y$.

déviation D par rapport à la ligne de plus grande est :

$D = X(t_f) = -\dfrac{2}{3}l\Omega\sqrt{\dfrac{2l}{g\sin\alpha}}\sin(\lambda-\alpha)$.

$n(\alpha-\lambda) > 0$ (donc $\alpha > \lambda$), $D > 0$: l'objet est vers l'est ; si $\sin(\alpha-\lambda) < 0$ (donc $\alpha < \lambda$), l'objet est dévié vers l'ouest. Dans le cas où $-\lambda) = 0$ (donc $\alpha = \lambda$), l'objet n'est pas dévié : cteur rotation de la Terre est parallèle au plan é (le plan incliné est orienté suivant l'axe de rota- le la Terre), donc la force d'inertie de Coriolis erpendiculaire au plan et sans effet sur le mou- nt du point sur le plan incliné.

le cadre de cet exercice, lorsque $\alpha = \lambda$, $\vec{v}$ et $\vec{\Omega}$ parallèles à Oy : la force de Coriolis est nulle.

rque :

$= \dfrac{\pi}{2}$, *on retrouve le résultat classique de la ation vers l'est » (cf. H-Prépa, Mécanique II, inée, application 5, chapitre 2).*

Les effets sont extrêmement faibles.

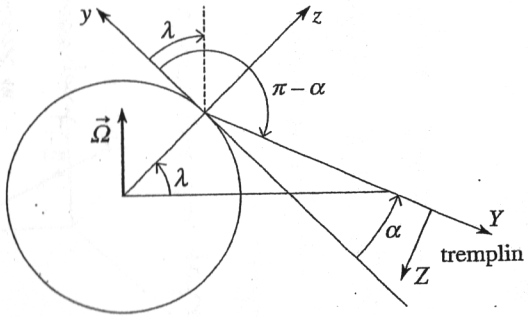
Si le tremplin est orienté sud-nord $\sin(\lambda-\alpha)$ devient $\sin(\lambda-\beta)$ avec $\beta = \pi - \alpha$,

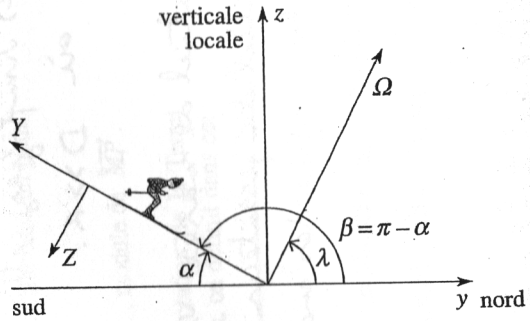
soit $\sin(\lambda+\alpha-\pi) = -\sin(\alpha+\lambda)$

et donc $\vec{v} = +2l\Omega\sin(\lambda+\alpha)\vec{e}_X - \sqrt{2gl\sin\alpha}\,\vec{e}_Y$

et $D = +\dfrac{2}{3}l\Omega\sqrt{\dfrac{2l}{g\sin\alpha}}\sin(\alpha+\lambda)$, ce qui donne :

$\vec{v} = 1{,}40.10^{-2}\,\vec{e}_X - 37{,}2\,\vec{e}_Y$ et $D = +2{,}5$ cm.





5 **1) a)** Le vecteur $\vec{u}$ s'écrit, dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: $\dfrac{\overrightarrow{MP}}{MP} = -\dfrac{x}{L}\vec{e}_x - \dfrac{y}{L}\vec{e}_y + \dfrac{L-z}{L}\vec{e}_z$.

En négligeant z devant L, le vecteur $\vec{T}$ s'écrit, dans la même base : $\vec{T} = T\vec{u} = -T\dfrac{x}{L}\vec{e}_x - T\dfrac{y}{L}\vec{e}_y + T\vec{e}_z$.

b) Dans le référentiel terrestre, la relation fondamentale de la dynamique appliquée au point M s'écrit (on néglige évidemment le terme des marées) :

$$m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_T} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_T}\,.$$

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$\vec{g} = -g\vec{e}_z$ et $\vec{\omega} = \omega(-\cos\lambda\,\vec{e}_x + \sin\lambda\,\vec{e}_z)$.

l'on suppose que z reste constant (le mouvement du point M a lieu dans le plan (Oxy), ce qui est justifié si les mouvements sont de faible amplitude), la relation précédente devient, en projection sur les trois axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T\dfrac{x}{L} \\ m\ddot{y} = -T\dfrac{y}{L} \\ 0 = -mg + T\,. \end{cases}$$

On en déduit $T = mg$, d'où, en posant $\omega_0^2 = \dfrac{g}{L}$:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \text{ et } \ddot{y} = -\omega_0^2 y\,.$$

La trajectoire du point M est alors une ellipse d'axes (Ox) et (Oy) dont les caractéristiques dépendent des conditions initiales (*cf.* exercice 9, chapitre 4).

3) a) En tenant compte de la force d'inertie de Coriolis, les deux premières équations deviennent :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T\dfrac{x}{L} + 2m\omega\sin\lambda\,\dot{y} \\ m\ddot{y} = -T\dfrac{y}{L} - 2m\omega\sin\lambda\,\dot{x}\,. \end{cases}$$

La troisième équation s'écrit :

$$m\ddot{z} = -mg + T + 2m\omega\cos\lambda\dot{y}\,.$$

Les deux termes prépondérants de cette équation sont mg et T, les deux autres étant des infiniment petits d'ordre 1 en ω. On pourra donc prendre pour T la valeur obtenue en négligeant la force d'inertie de Coriolis (ordre 0), c'est-à-dire $T = mg$. Les équations du mouvement deviennent, après simplification par m :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -g\dfrac{x}{L} + 2\omega\sin\lambda\,\dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = -g\dfrac{y}{L} - 2\omega\sin\lambda\,\dot{x}\,. & (2) \end{cases}$$

b) On effectue (1) + i(2) : la variable $\eta = x + iy$ vérifie alors l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{\eta} + 2i\omega\sin\lambda\,\dot{\eta} + \omega_0^2\eta = 0 \quad \left(\text{avec toujours } \omega_0^2 = \frac{g}{L}\right).$$

4) a) On pose $\eta = \eta'\exp(-i\Omega t)$ avec $\Omega = \omega\sin\lambda$.

On a alors : $\dot{\eta} = (\dot{\eta}' - i\Omega\eta')\exp(-i\Omega t)$

et $\ddot{\eta} = (\ddot{\eta}' - 2i\Omega\dot{\eta}' - \Omega^2\eta')\exp(-i\Omega t)$.

On reporte ces expressions dans l'équation obtenue à la question 3 b).

Après simplification, on en déduit l'équation vérifiée par η' : $\ddot{\eta}' + (\omega_0^2 + \Omega^2)\eta' = 0$.

86 400

Ω est donc de l'ordre de 10^{-5} rad.s^{-1}, alors que p un pendule de longueur 67 m, $\omega_0 = 0{,}38$ rad.s^{-1}.

Le rapport $\dfrac{\Omega^2}{\omega_0^2}$ est donc de l'ordre de $3{,}6.10^{-8}$:

peut sans problème négliger Ω^2 devant ω_0^2 d l'équation établie à la question 4 a).

c) η' est donc solution de $\ddot{\eta}' + \omega_0^2\eta' = 0$, d $\eta' = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$, A et B étant constantes complexes. Les conditions initiales, η'_0 et $\dot{\eta}' = i\Omega x_0$, sont déduites des calculs de la quest 4 a). On obtient :

$$\eta'(t) = x_0\cos(\omega_0 t) + i\frac{\Omega}{\omega_0}x_0\sin(\omega_0 t)\,.$$

d) On en déduit :

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{Re}(\eta') = x_0\cos(\omega_0 t) \\ y'(t) = \mathrm{Im}(\eta') = x_0\dfrac{\Omega}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\,. \end{cases}$$

La trajectoire de M dans le référentiel $(O; x', y'$ est bien une ellipse d'axes (Ox') et (Oy'), de den grand axe $a = x_0$ et de demi – petit axe $b = x_0\dfrac{\Omega}{\omega_0}$

En un lieu de latitude 45° nord, $\dfrac{b}{a} = 1{,}35.10^{-4}$:

l'ellipse est très aplatie, elle est quasiment confon avec l'axe (Ox').

A.N. : $b = 0{,}40$ mm pour $x_0 = 3$ m ; l'ellipse pou donc être assimilée à un segment de droite.

e) Le pendule oscille donc à la vitesse angula $\omega_0 = 0{,}38$ rad.s^{-1}, dans le plan $(Ox'z')$. Celui-ci tou autour de l'axe (Oz) à la vitesse angula $\Omega = 5.10^{-6}$ rad.s^{-1}, c'est-à-dire une période de rc tion égale à $\dfrac{24\text{ h}}{\sin\lambda} \approx 33$h 57 min, soit 34 h.

6 **1)** La relation fondamentale de la dynamic appliquée au point P dans le référentiel lié à la Te s'écrit (*cf. Rappels de cours*) :

$$m\vec{a}(P) = \vec{0} = \vec{F} + (m\vec{G}_T(P) + m\omega^2\overrightarrow{HP}) + m((\vec{G}_L(P) - \vec{G}_L(C)) + (\vec{G}_S(P) - \vec{G}_S(C)$$

où H est la projection orthogonale de P sur l'axe rotation de la Terre (Cz).

corrigé

Le potentiel de marée

1) $\vec{f}_m = m[\vec{g}(M) - \vec{g}(E)]$

$\vec{g}(M) = \mathcal{G}\frac{m_A}{r^3}\vec{MA}$, $\vec{g}(G) = \mathcal{G}\frac{m_A}{D^3}\vec{GA}$

$\vec{MA} = \vec{MG} + \vec{GA} = -R\cos\alpha\,\vec{e_x} - R\sin\alpha\,\vec{e_y} + D\vec{e_x}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f}_m = m\mathcal{G}m_A\left[\frac{(D-R\cos\alpha)\vec{e_x} - R\sin\alpha\,\vec{e_y}}{r^3} - \frac{D}{D^3}\vec{e_x}\right]}$$

2) $r \gg R \Rightarrow$ $(D \gg R)$

$$\vec{f}_m = m\mathcal{G}m_A\left[\frac{D(1-\frac{R}{D}\cos\alpha)\vec{e_x} - R\sin\alpha\,\vec{e_y}}{(D^2+R^2-2DR\cos\alpha)^{3/2}} - \frac{\vec{e_x}}{D^2}\right]$$

$$\simeq m\frac{\mathcal{G}m_A}{D^2}\left[\left((1-\frac{R}{D}\cos\alpha)\vec{e_x} - \frac{R}{D}\sin\alpha\,\vec{e_y}\right)\left(1+3\frac{R}{D}\cos\alpha\ldots\right) - \vec{e_x}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{f}_m = \frac{m\mathcal{G}m_A}{D^3}(2x\vec{e_x} - y\vec{e_y})}$$

3) V_m / $\vec{f}_m = -\vec{\nabla}V_m \Rightarrow \boxed{V_m = -\frac{m\mathcal{G}m_A}{D^3}\left(x^2 - \frac{y^2}{2}\right)}$

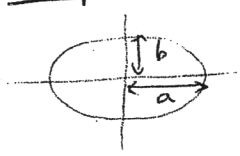
4) $\vec{f}_p = \mathcal{G}\frac{mm_T}{R^2}(-\cos\alpha\,\vec{e_x} - \sin\alpha\,\vec{e_y}) = \mathcal{G}\frac{mm_T}{R^3}(-x\vec{e_x} - y\vec{e_y})$

V_p / $\vec{f}_p = -\vec{\nabla}V_p \Rightarrow \boxed{V_p = \mathcal{G}\frac{mm_T}{2R^3}(x^2+y^2)}$

5) $U = V_m + V_p = \frac{mm_T\mathcal{G}}{2R^3}\left[\left(1-2\frac{m_A}{m_T}\left(\frac{R}{D}\right)^3\right)x^2 + \left(1+\frac{m_A}{m_T}\left(\frac{R}{D}\right)^3\right)y^2\right]$

D.L. $\Rightarrow$ $\text{cste} = \frac{x^2}{\underbrace{\left(1+\frac{m_A}{m_T}\left(\frac{R}{D}\right)^3\right)}_{a}{}^2} + \frac{y^2}{\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\frac{m_A}{m_T}\left(\frac{R}{D}\right)^3\right)}_{b}{}^2}$ $\Rightarrow$ ellipse

demi grand axe — demi petit axe



6) $\Delta h = (a-b)R \Rightarrow \boxed{\Delta h = \frac{3}{2}\frac{m_A}{m_T}\left(\frac{R}{D}\right)^3 \times R}$

7) $\Delta h_L = 0{,}54\,m$ $\Delta h_S \simeq 0{,}26\,m$ $\Delta h_{L+S} \simeq 1\,m$ lune au périgée.

8) Dans des îlots isolés il n'y a pas de phénomènes de résonance notables car les côtes sont très éloignées.

9) $m_{titan} = 1{,}3.10^{23}\,kg$ $D_{Sat/Tit} = 1\,222\,000\,km$ $\Delta h \simeq 158\,m$!
$M_{sat.} = 95.m_T$
$R_{titan} = 2575\,km$