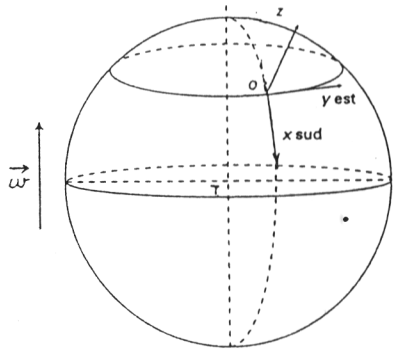
DEVOIR LIBRE

PENDULE DE FOUCAULT

On note $\mathcal{R}_T$ le référentiel terrestre. $\mathcal{R}_T$ est supposé en rotation uniforme autour de l'axe des pôles fixe dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ supposé galiléen, à la vitesse angulaire $\omega = 7{,}29.10^{-5}\,\text{rad.s}^{-1}$. On considère le repère Oxyz, O étant un point de la Terre situé à la latitude λ Nord, Oz passant par le centre C de la Terre et ascendant, Ox étant tangent au méridien en O et dirigé vers le Sud, Oy étant tangent au parallèle en O et dirigé vers l'Est. Soit $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ la base orthonormée correspondante.

Un pendule simple de longueur L est attaché au point P(0,0,L). A son extrémité M est attachée une masse ponctuelle m. A un instant donné, le pendule oscille dans un plan quelconque.

Dans ce problème, on néglige la force d'inertie d'entraînement et on suppose le champ de pesanteur localement uniforme.



1) a- On pose $\vec{u} = \overrightarrow{MP}/MP$ avec MP = L module de $\overrightarrow{MP}$. Donner les trois composantes de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B}(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) b- On pose $\vec{T} = T\,\vec{u}$ tension du fil exercée sur la masse m. Donner les trois composante de $\vec{T}$ (sur la base $\mathcal{B}$). On admettra que z « L.

2) a- En notant $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$ les composantes de l'accélération dans $\mathcal{R}_T$ sur la base $\mathcal{B}$, écrire les trois équations du mouvement en fonction de x, y, T, m, g et L en négligeant la force de Coriolis (appliquer la RFD).

2) b- En admettant $\ddot{z} = 0$ (du fait que z « L), en déduire les deux équations simples vérifiées par $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$. On posera $\omega_o^2 = g/L$ dans ces deux équations.

3) a-En tenant compte maintenant de la force de Coriolis, écrire les équations en $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ en prenant pour composante de la vitesse dans $\mathcal{R}_T$: $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z} = 0$.

3) b-Poser $\eta = x + jy$ et déduire de 3)a- l'équation différentielle vérifiée par η (on a $\dot{\eta} = \dot{x} + j\dot{y}$ et $\ddot{\eta} = \ddot{x} + j\ddot{y}$).

4) On désire obtenir les équations du mouvement du point M dans le repère Ox'y'z', d'axe Oz' confondu avec Oz et tournant autour de Oz à la vitesse angulaire constante $\Omega = \omega \sin\lambda$. On fait donc le changement de variable

$$\eta' = \eta\, e^{j\Omega t} \quad \text{où } \eta' = x' + jy'$$

4) a- Ecrire l'équation différentielle vérifiée par η'.

4) b- Négliger le terme en Ω^2 devant le terme en ω_o^2 dans cette équation et déduire la solution générale $\eta'(t)$.

4) c- Les conditions initiales sont, $x(0) = x_o$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$. En déduire $\eta'(0)$ et $\dot{\eta}'(0)$, valeurs initiales de η' et $\dot{\eta}'$.

4) d- Déduire de $\eta'(t)$ les expression de x'(t) et y'(t) sous la forme respective $a\cos\omega_o t$ et $b\sin\omega_o t$; donner les expressions de a et b.

4) e- En déduire que dans le repère Ox'y'z', la trajectoire de M est une ellipse. Calculer numériquement le rapport b/a à la latitude $\lambda = 45°$ Nord. On donne $g = 9{,}8\,\text{m.s}^{-2}$ et L = 67 m.

Le résultat trouvé implique que le mouvement du pendule a pratiquement lieu dans le plan (Ox'z'). Calculer b si x(0) = 3 m.

4) f- Déduire de 4) a- et b- que le plan d'oscillation du pendule tourne à la vitesse angulaire Ω. Calculer la période de rotation du pendule dans $\mathcal{R}_T$ à la latitude $\lambda = 45°$ Nord.

PCSI DL n°7 Corrigé 10 - 1 - 97

Pendule de Foucault

1)

a) $$\boxed{\vec{u} = -\frac{x}{L}\vec{i} - \frac{y}{L}\vec{j} + \frac{(L-z)}{L}\vec{k}}$$

b) $\vec{T} = -\frac{xT}{L}\vec{i} - \frac{yT}{L}\vec{j} + \frac{L-z}{L}T\vec{k}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{T} \simeq -\frac{xT}{L}\vec{i} - \frac{yT}{L}\vec{j} + T\vec{k}}$$

2)

a) Les composantes de l'accélération sont :

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{T}{mL}x \qquad \ddot{y} = -\frac{T}{mL}y \qquad \ddot{z} = \frac{T}{m} - g}$$

b) On peut confondre T avec mg, ce qui donne :

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{g}{L}x = -\omega_0^2 \quad \ddot{y} = -\omega_0^2 y}$$

3)

a) les composantes de la force de Coriolis viennent s'ajouter aux précédentes :

$$\boxed{\ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\omega \sin\lambda\, \dot{y} \quad \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\omega \sin\lambda\, \dot{x}}$$

b) L'équation différentielle de η s'écrit :

$\ddot{\eta} = \ddot{x} + i\ddot{y}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot{\eta} = -\omega_0^2 \eta - 2i\omega \sin\lambda\, \dot{\eta}}$

4)

a) $\eta' = \eta e^{i\Omega t} \Rightarrow \dot{\eta}' = (\dot{\eta} + i\Omega\eta)e^{i\Omega t} \Rightarrow \ddot{\eta}' = (\ddot{\eta} + 2i\Omega\dot{\eta} - \Omega^2\eta)e^{i\Omega t}$

soit $\ddot{\eta}' = [(-\omega_0^2\eta - 2i\Omega\dot{\eta}) + 2i\Omega\dot{\eta} - \Omega^2\eta]e^{i\Omega t} = -(\omega_0^2 + \Omega^2)\eta'$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\eta}' \simeq -\omega_0^2 \eta'}$$

b) Les solutions de l'équation précédente sont de la forme :

$$\boxed{\eta' = \underline{A}\cos\omega_0 t + \underline{B}\sin\omega_0 t}$$

où $\underline{A}$ et $\underline{B}$, complexes, doivent être déterminés par les conditions aux limites.

c) Les conditions initiales se traduisent par :

$\eta(0) = x_0 \Rightarrow \eta'(0) = x_0 = \underline{A}$

$\dot{\eta}(0) = 0 \Rightarrow \dot{\eta}'(0) = \dot{\eta}(0) + i\Omega\eta(0) = i\Omega x_0 = \underline{B}\omega_0$

$$\boxed{\underline{A} = x_0 \quad \text{et} \quad \underline{B} = \frac{i\Omega x_0}{\omega_0}}$$

d) L'expression de $\eta'(t)$ est donc :

$\eta'(t) = x_0\cos\omega_0 t + i\frac{\Omega x_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t = x' + iy'$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x'(t) &= x_0\cos\omega_0 t \\ y'(t) &= \frac{\Omega x_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \end{aligned}} \qquad \begin{cases} a = x_0 \\ b = \frac{\Omega x_0}{\omega_0} \end{cases}$$

e) x' et y' sont déphasés de $\pi/2$, et b est très inférieur à a. La trajectoire de M dans $(Ox'y'z')$ est donc une ellipse très aplatie :

$\frac{b}{a} = \frac{\Omega}{\omega_0}$

$x_0 = 3\,m \Rightarrow b = 4{,}05 \cdot 10^{-4}\,m$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned} \frac{b}{a} &= 1{,}35 \cdot 10^{-4} \\ b &\simeq 0{,}4\,mm \end{aligned}}$

f) Le repère $(Ox'y'z')$ tourne autour de Oz' à la vitesse Ω. Donc l'ellipse tourne elle-même autour de Oz' à la vitesse Ω. La période de rotation du pendule de Foucault est :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega \sin\lambda} = 121\,890\,s = 33\,h\,51\,min\,30\,s}$$