17

PROBLEME 1

Mouvement d'un proton dans une chambre à bulles

On étudie le mouvement horizontal d'un proton dans un liquide sursaturant (des bulles de gaz se créent au passage du proton et matérialisent sa trajectoire).

Un proton de masse m et de charge e, considéré comme un point matériel, a une vitesse initiale $\vec{v}_0$ au point fixe O; il est dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant $\vec{B}$; le liquide exerce sur ce proton une force de frottement fluide $\vec{f} = -K\vec{v}$, où K est une constante positive et $\vec{v}$ est la vitesse du proton à l'instant de date t.

Par la suite, on posera : $\omega = \frac{eB}{m}$ et $\tau = \frac{m}{K}$.

I. Equation du mouvement

1 1. Faire le bilan des forces exercées sur le proton se déplaçant dans le liquide (on néglige le poids du proton).

1 2. Etablir l'équation différentielle du mouvement du proton.

II. On désigne par $Oxyz$ un trièdre orthogonal direct lié au référentiel galiléen et par $(\vec{u}_x, \vec{u}_y \vec{u}_z)$, la base de vecteurs unitaires qui lui est associée.

On choisit: $\vec{B} = B\vec{u}_z$ et $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$.

1 1. Si la force de frottement était négligeable, quelle serait la variation d'énergie cinétique du proton?

1 1 1 Rappeler, en utilisant le repère de Frenet, quelle serait alors la trajectoire du proton (on donnera les caractéristiques de cette trajectoire).

1 2. Qualitativement, quelles sont les modifications apportées par la force de frottement fluide sur cette trajectoire?

2 3. Montrer que l'équation différentielle du (A(I)2) peut se mettre sous la forme de deux équations différentielles

$$\frac{dv_x}{dt} = av_y - bv_x \qquad (1)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -av_x - bv_y \qquad (2)$$

Déterminer a et b.

4. On pose j, le nombre complexe tel que $j^2 = -1$; pour résoudre le système d'équations différentielles, on introduit le complexe: $\underline{V} = v_x + jv_y$.

2 Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes à une équation différentielle dont la solution est :

$$\underline{V} = v_0 e^{-(b+ja)t}$$

1 En déduire v_x et v_y.

III. Etude de la trajectoire

2 1. Déduire de $\underline{V}$ l'expression de $\underline{X} = x(t) + jy(t)$ en fonction de a, b, v_0 et t.

2. Déterminer la limite, notée $\underline{X}_\infty$, de $\underline{X}$ lorsque t tend vers l'infini.

1 En déduire la position limite $M_\infty(x_\infty, y_\infty)$ en fonction de v_0, ω et τ.

3. Donner l'allure de la trajectoire. Comment serait modifiée la trajectoire pour une particule de signe opposé?

1

12

PROBLÈME - 3

Dans les questions qui suivent, le repère terrestre, noté R_0, est considéré comme galiléen. Un wagon W se déplace sur une voie rectiligne horizontale en un lieu où le champ de pesanteur **g** est uniforme et a une grandeur g, on note **a** l'accélération de W par rapport à R_0. Un pendule simple est constitué par un point matériel M de masse m attaché à un fil inextensible et de masse négligeable, de longueur l, dont l'autre extrémité est fixée en un point O du plafond de W. On ne considérera que les mouvements du pendule dans un plan vertical passant par O et par l'axe de la voie ; M est repéré par l'angle $\theta = (\mathbf{g}, \mathbf{OM})$ que l'on supposera toujours petit (figure 1).

On suppose que le frottement de l'air exerce sur M une force :

$$f = -hv$$

h étant une constante et v la vitesse de M par rapport à W ; on néglige toute autre cause de frottement et se propose d'étudier le mouvement du pendule relativement à W, caractérisé par la fonction $\theta(t)$, pour diverses valeurs de a.

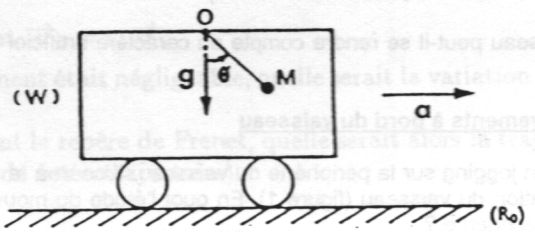

Fig. 4.4-1

Les conditions initiales seront toujours identiques : le pendule est abandonné à $t = 0$ sans vitesse initiale par rapport à W, il fait à cette date avec la verticale un angle θ_0 petit.

• 1) Étudier le mouvement pour $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

a) En négligeant le frottement de l'air (on précisera), donner l'expression de la pulsation propre ω_0 du pendule ; 2

b) Sans négliger le frottement de l'air. 3

• 2) Avec $\theta_0 = 0$ et $\dot{\theta}_0 = 0$, étudier le mouvement pour une accélération **a** constante et le frottement de l'air non négligeable (la résolution analytique complète n'est pas exigée, on peut se contenter d'établir l'équation différentielle du mouvement et de représenter graphiquement les diverses allures possibles de la fonction $\theta(t)$ en justifiant celles-ci). 3

• 3) Le mouvement du wagon est sinusoïdal ; x étant l'abscisse d'un point de W par rapport à la voie :

$$x = X \cos \omega t \text{ ; } X \text{ est un scalaire positif}$$

On ne néglige pas le frottement de l'air :

a) Au bout d'un temps suffisamment long (on précisera), quelle est la nature du mouvement pris par le pendule ? 1

b) Exprimer en fonction des données l'amplitude angulaire A du mouvement du pendule ; 2,5

c) L'hypothèse θ petit est-elle toujours nécessairement vérifiée ? 0,5