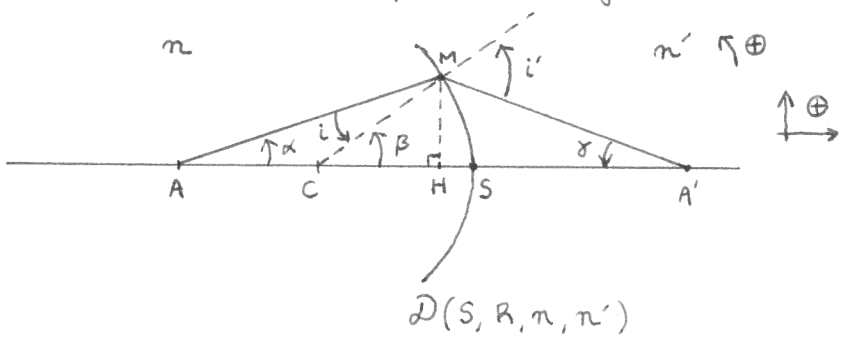
Exercice 3 : Dioptres sphériques et lentilles sphériques

1) Nous considérons un dioptre sphérique de rayon $R = \overline{SC}$.



a) A partir des notations de la figure établir dans le cadre de l'approximation de Gauss la relation de conjugaison au sommet du dioptre sphérique.

b) Déterminer les foyers image ($f' = \overline{SF'}$) et objet ($f = \overline{SF}$). Comparez le signe de f et f'.

2) Une lentille mince sphérique est un système optique constitué de deux dioptres sphériques ($D_1(S_1, R_1, 1, n)$ et $D_2(S_2, R_2, n, 1)$) accolés ($S_1 \simeq S_2 \simeq O$).

a) Retrouver la relation de conjugaison d'une lentille mince sphérique.

b) Quelle est l'expression de sa vergence ?

3) Aberrations chromatiques.

La distance focale d'une lentille mince sphérique est donnée par : $1/f' = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$.

Pour le flint léger : $n_R = 1,567$ pour $\lambda_R = 768$ nm (Rouge)
$n_B = 1,594$ pour $\lambda_B = 434$ nm (Bleu)

Rayons de courbure : $R_1 = 1$ m ; $R_2 = -2$ m

a) La lentille est-elle convergente ou divergente ? Faire un schéma.

b) Calculer la distance focale de la lentille pour les deux longueurs d'onde indiquées.

c) Tracer les rayons pour ces deux radiations dans le cas d'un objet à l'infini sur le schéma du a).

4) Pour corriger les aberrations chromatiques nous allons réaliser un achromat.
Un achromat est constitué de deux lentilles accolées possédant une face commune.
Ces deux lentilles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ possèdent respectivement l'indice n et n' et sont plongées dans l'air.
Nous nommerons R_1, R_2 et R_3 les rayons de courbure.

a) Exprimez les vergences V et V' de chacune des lentilles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$.
Exprimez la vergence totale du système $V_{\mathcal{S}}$ ($\mathcal{S}=\{\mathcal{L},\mathcal{L}'\}$)

b) Nous posons : $C = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$ et $C' = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}$

(facteurs géométriques)

Nous choisissons les rayons de courbure tels que $\frac{\Delta V_{\mathcal{S}}}{\Delta \lambda} = 0$ (pour deux longueurs d'ondes choisies : $\Delta\lambda = \lambda_R - \lambda_B$).
Que dire alors de la nature des lentilles ?
Faire un schéma.
Qu'avons nous alors réalisé ?

5) La lentille $\mathcal{L}$ est en flint léger, et $\mathcal{L}'$ en crown :
$n'_R(\lambda_R) = 1,511$ et $n'_B(\lambda_B) = 1,528$
Si $R_2 = -2\,m$ que valent R_1 et R_3 pour $f'_{\mathcal{S}R} = f'_{\mathcal{S}B} = f'_{\mathcal{S}} = 1\,m$?
On considérera l'indice moyen : $\bar{n}^{(\prime)} = (n^{(\prime)}_R + n^{(\prime)}_B)/2$.
Nature des lentilles et schéma.
Que vaut alors la distance focale pour la raie jaune du sodium : $\lambda_J(Na) = 589$ nm ; $n_J = 1,575$; $n'_J = 1,517$?
Conclusion. Que dire des aberrations géométriques ?

Dioptres et lentilles sphériques (corrigé détaillé)

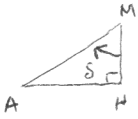
1) a) • quantités algébriques définies positives :

angles : $\alpha, \beta, \gamma, i, i'$ (sens positif $\oplus$)

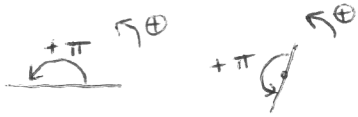
distances : $\overline{AH}, \overline{CH}, \overline{HA'}, \ldots$ (sens positif horizontal $\xrightarrow{\oplus}$)

$\overline{HM}$ (sens positif vertical $\uparrow\oplus$)

• autres exemples : → $\overline{SH} < 0$ (sens $\xleftarrow{\ominus}$ de S vers H) , → $\overline{AA'} > 0$ ($\xrightarrow{\oplus}$) ; → $\overline{A'A} < 0$ (sens inv de $\oplus$ soit $\xleftarrow{\ominus}$)

→ 

$\delta < 0$ (sens $\ominus$ = $\ominus$, inv de $\oplus$ = $\oplus$) et $\delta = -i$

→ $\pi > 0$ 

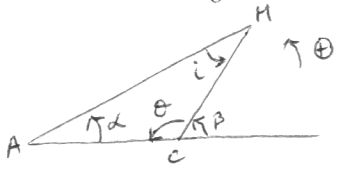
→ $+\pi/2$ $\frac{\pi}{2} > 0$

→ 

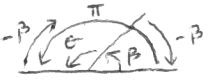
$\theta = -\frac{\pi}{2}$ car $\ominus$ → $\overline{MH} < 0$ (sens $\downarrow\ominus$)

Après ce petit intermède sur les quantités algébriques venons en au 1)a) :

• Dans le triangle (ACM) :



$\alpha, i, \theta > 0 \Rightarrow \alpha + i + \theta = \pi$

θ ? : 

$\theta = \pi - \beta$ $\Rightarrow \alpha + i + (\pi - \beta) = \pi$

$\Rightarrow \alpha + i - \beta = 0$

$\Rightarrow \boxed{i = \beta - \alpha}$ (1)

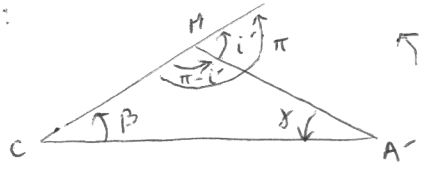
rem : dans un triangle $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ ou $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} > 0$

ou 

$\Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = \pi$

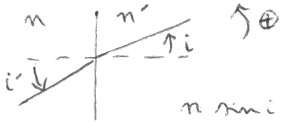
car $\alpha_1 > 0$; $\alpha_2, \alpha_3 < 0$

• Dans le triangle (CMA') :



$\gamma, \beta, (\pi - i') > 0 \Rightarrow \gamma + \beta + (\pi - i') = \pi \Rightarrow \boxed{i' = \gamma + \beta}$ (2)

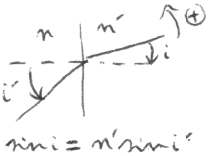
• Loi de Descartes pour la réfraction :



$i, i' > 0$

$n \sin i = n' \sin i'$

Approximation de Gauss (petits angles) : $\sin i \simeq i$, $\sin i' \simeq i$ $\Rightarrow \boxed{n i = n' i'}$ (3)

rem : si 

$-n \sin i = n' \sin i'$

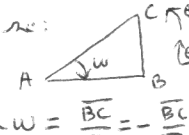
car $\sin(-i) = -\sin i$

• (3), (1) (2) $\Rightarrow n(\beta - \alpha) = n'(\gamma + \beta) \Rightarrow \underline{n'\gamma + n\alpha = (n - n')\beta}$ (*)

• Dans le triangle (AHM) : $\alpha, \overline{HM}, \overline{AH} > 0 \Rightarrow \tan\alpha \simeq \alpha = \frac{\overline{HM}}{\overline{AH}}$

" " " (CHM) : $\beta, \overline{HM}, \overline{CH} > 0 \Rightarrow \beta \simeq \frac{\overline{HM}}{\overline{CH}}$

" " " (A'HM) : $\gamma, \overline{HM}, \overline{HA'} > 0 \Rightarrow \gamma \simeq \frac{\overline{HM}}{\overline{HA'}}$

rem : si 

$\tan\omega = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

car $\omega < 0$

• Approx de Gauss $\Rightarrow H \simeq S \overset{(*)}{\Rightarrow} n' \frac{\overline{HM}}{\overline{SA'}} + n \frac{\overline{HM}}{\overline{AS}} = (n - n') \frac{\overline{HM}}{\overline{CS}} \Rightarrow \boxed{\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{(n' - n)}{\overline{SC}}}$; $R = \overline{SC}$

relation de conjugaison du dioptre sphérique au sommet.

1) b) . Foyer image : point image pour lequel le point objet est à l'infini.

$A \to \infty \Rightarrow A' = F'$ et $\frac{n'}{\overline{SF'}} = \frac{(n'-n)}{R} \Rightarrow f' = \frac{n'R}{(n'-n)}$ (1)

. Foyer objet : ...

$A' \to \infty \Rightarrow A = F$ et $-\frac{n}{\overline{SF}} = \frac{(n'-n)}{R} \Rightarrow f = -\frac{nR}{(n'-n)}$ (2)

. n et $n' > 0$ d'où de part le signe $-$ dans (2), f et f' de signes opposés.

2) a) $A \xrightarrow[(i)]{\mathcal{D}_1(S_1, R_1, 1, n)} A_1 \xrightarrow[(ii)]{\mathcal{D}_2(S_2, R_2, n, 1)} A'$

rem : $\frac{n'}{\overline{SA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{(n'-n)}{\overline{SC}}$ pour $\mathcal{D}(S, R, n, n')$

(i) $\frac{n}{\overline{S_1A_1}} - \frac{1}{\overline{S_1A}} = \frac{(n-1)}{\overline{S_1C_1}} = \frac{(n-1)}{R_1}$

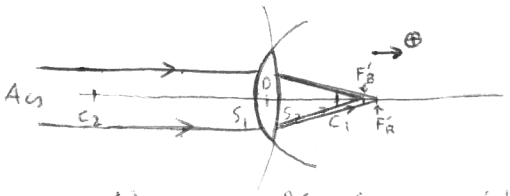
(ii) $\frac{1}{\overline{S_2A'}} - \frac{n}{\overline{S_2A_1}} = \frac{(1-n)}{\overline{S_2C_2}} = \frac{(1-n)}{R_2}$ accolés $\Rightarrow S_1 \simeq S_2 \simeq O$,

d'où : (i) + (ii) $\Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{(n-1)}{R_1} + \frac{(1-n)}{R_2} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

soit $\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{avec : } \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$

b) $\underline{V = \frac{1}{f'} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$

3) a) $(n-1) > 0$ car $n > 1$; $\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-2}\right) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow V > 0 \Rightarrow$ convergente ($f' > 0$)



(bords minces $\Rightarrow$ convergente ; bords épais $\Rightarrow$ divergente)

b) $f'_B = (n_B - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \overset{A.N.}{\Rightarrow} \underline{f'_B = 1,12\,m}$ idem $n_R \Rightarrow \underline{f'_R = 1,18\,m}$

c) voir schéma du a) $\Rightarrow$ aberrations chromatiques.

4) a) Il s'agit bien de 2 lentilles constituées chacune de 2 dioptres (soit 4 dioptres au total dont un est commun).

. $\mathcal{L}(R_1, R_2, n)$: $\underline{V = V_{\mathcal{L}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$

. $\mathcal{L}'(R_2, R_3, n')$: $\underline{V' = V_{\mathcal{L}'} = (n'-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)}$

. $\mathcal{S} = \{\mathcal{L}, \mathcal{L}'\}$ accolées : d'après le théorème de vergences : $V_{\mathcal{S}} = V_{\mathcal{L}} + V_{\mathcal{L}'}$

$\Rightarrow \underline{V_{\mathcal{S}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + (n'-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)}$

b) $V_{\mathcal{S}} = (n-1)C + (n'-1)C'$ (**)

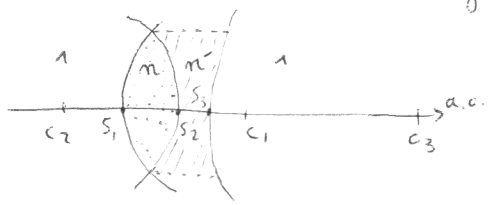
C et C' sont des facteurs géométriques qui ne dépendent pas de la longueur d'onde λ.

↳

nous aimerions que la vergence du système optique $\mathcal{S}$ ne dépende pas de λ. Soit une variation nulle de la vergence lorsque λ varie :

$$\Rightarrow \frac{\Delta V_{\mathcal{S}}}{\Delta \lambda} = 0 \overset{(**)}{\Rightarrow} \frac{\Delta V_{\mathcal{S}}}{\Delta \lambda} = C\frac{\Delta n}{\Delta \lambda} + C'\frac{\Delta n'}{\Delta \lambda} = 0$$

Or nous avons vu lors du cours sur les milieux dispersifs que pour les milieux transparents $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right) < 0$ dans le visible. De ce fait C et C' doivent être de signes différents pour la nullité de $\frac{\Delta V_{\mathcal{S}}}{\Delta \lambda}$.
Or $(n-1)$ et $(n'-1)$ positifs d'où V et V' de signes différents.
Un achromat doit être constitué d'une lentille divergente et d'une autre convergente :



(ici système épais pour faciliter le dessin)

5) Nous voulons pour le système $\mathcal{S} = \{\mathcal{L}, \mathcal{L}'\}$, une distance focale $f' = f'_{\mathcal{S}} = 1\,m$.
Ici : 2 inconnues R_1 et R_3 (R_2 fixé).
2 équations :

$$\begin{cases} \frac{\Delta n}{\Delta \lambda} C + \frac{\Delta n'}{\Delta \lambda} C' = 0 & (1) \\ V_{\mathcal{S}} = \frac{1}{f'_{\mathcal{S}}} = (\bar{n}-1)C + (\bar{n}'-1)C' & (2) \end{cases}$$

(prendre des indices moyens est une approximation d'autant plus valable que $n^{(-)}_B$ et $n^{(-)}_R$ sont proches - cas ici).

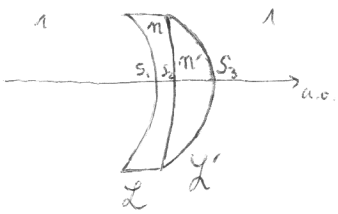
$$(1) \Rightarrow C' = -\frac{\Delta n}{\Delta n'} C \qquad (2) \Rightarrow C = \frac{1}{f'_{\mathcal{S}}\left[(\bar{n}-1) - \frac{\Delta n}{\Delta n'}(\bar{n}'-1)\right]} \quad \text{et} \quad R_1 = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + C}$$

A.N : $\bar{n} = \frac{n_R + n_B}{2} = \frac{1{,}567 + 1{,}594}{2} = 1{,}5805$; (garder 4 chiffres significatifs au moins jusqu'à la fin du calcul ; cohérence en précision)
$\bar{n}' = 1{,}5195$;
$\Delta n = -2{,}7.10^{-2}$; $\Delta n' = -1{,}7.10^{-2}$; $f'_{\mathcal{S}} = 1\,m$

$\Rightarrow C = -4{,}0885\ m^{-1} \Rightarrow \underline{R_1 = -0{,}2179\ m}$

idem pour R_3 : $C' = 6{,}4935\ m^{-1} \Rightarrow \underline{R_3 = -0{,}1430\ m}$

$C < 0 \Rightarrow$ <u>$\mathcal{L}$ divergente</u> ; $C' > 0 \Rightarrow$ <u>$\mathcal{L}'$ convergente</u>



- Pour la raie jaune du sodium : $\frac{1}{f'_{\mathcal{S}_J}} = (n_J - 1)C + (n'_J - 1)C' \Rightarrow f'_{\mathcal{S}_J} = 1{,}006\,m \Rightarrow \frac{f'_J - f'}{f'} = 0{,}6\%$!

Par interpolat° la distance focale reste presque la m̂ dans tout le visible ⇒ achromat.

- On peut ensuite minimiser les aberrations géométriques en faisant varier R_2 (paramètre laissé à notre disposition). Ici par exemple R_1 et R_3 sont faibles et peuvent engendrer d'importantes aberrations géo. (courbure forte ⇒ angles d'incidence importants ⇒ Approximation de Gauss mal vérifiée de même pour le stigmatisme et l'aplanétisme.)