

Premier TD d'électrostatique

+ corrigé

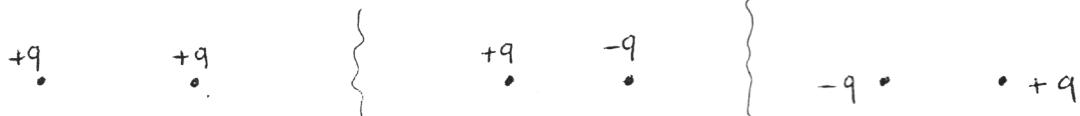
Exercice 1: Donnez l'ensemble des points M où on a des informations sur le champ électrique en utilisant simplement des considérations de symétrie (direction ? sens ? nullité ?) dans les cas suivants :

→ Sphère chargée uniformément : $\rho = \text{cste} > 0$

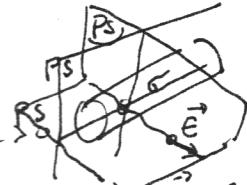


Que dire si $\rho(r)$?

→ Systèmes de charges ponctuelles :

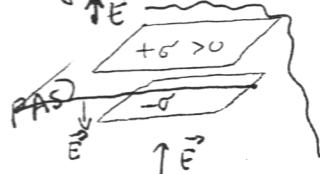


→ Anneau chargé uniformément : $\lambda = \text{cste} < 0$



→ Cylindre infini à section circulaire chargé en surface : $\sigma = \text{cste} > 0$

→ Plans infinis parallèles chargés en surface :



Exercice 2: Calcul du champ créé par un fil (calcul direct)

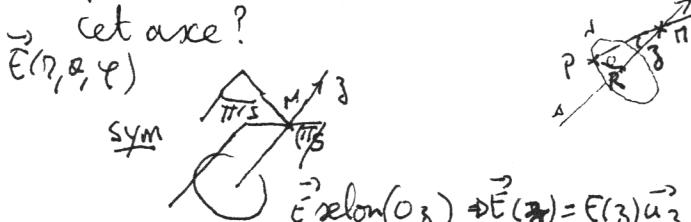
Soit un fil rectiligne infini de densité linéaire de charge λ positive. Quel est le champ électrique créé en un point situé à une distance a du fil ?

(corrs)

Réponse (partielle) : $E = \lambda / (2\pi a \epsilon_0)$

Exercice 3: Calcul direct du champ créé par un anneau :

Soit un anneau de densité linéaire λ et de rayon R . Soit un axe \vec{z} passant perpendiculairement en son centre. Quel est le champ électrique créé sur cet axe ?



$$\begin{aligned} z &= \text{cste} \\ PM &= \text{cste} \\ \sigma &= \text{cste} \end{aligned}$$

$$= D \quad E(z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{R^2} \int_{\text{de}}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= \vec{E} \cdot \hat{u}_z \Rightarrow \vec{E}(z) = \int_{\text{de}} \frac{d\vec{E}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM} \cdot \hat{u}_z}{PM^3} \\ PM \cdot \hat{u}_z &= PM \cos\theta \\ PM^2 &= R^2 + z^2 \\ \cos\theta &= \frac{z}{PM} \\ \int d\ell &= 2\pi R \end{aligned}$$

$$E(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} 2\pi R$$

$$E(z) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Rz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Exercice 4: Une sphère S de centre O et de rayon R est chargée en volume avec une densité ρ ne dépendant que de la distance du point considéré au centre O, donnée par la loi :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \alpha \frac{r^2}{R^2}\right) \quad \text{où } \rho_0 \text{ et } \alpha \text{ sont des constantes.}$$

- 1°) Quelle est la charge dQ comprise entre deux sphères intérieures à S, centrées en O, et dont les rayons sont r et $r+dr$? Quelle est la charge totale Q de S?
- 2°) Quelle est la charge volumique moyenne ρ_m de S?

Exercice 5:

Une sphère de rayon R porte la densité surfacique de charge :

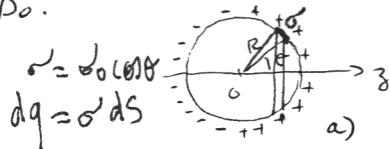
$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$$

Quelles sont les symétries de cette distribution?



Exercice 6: Sur le schéma a) est représentée la même sphère de centre O que dans l'exercice 5.

Le schéma b) représente 2 boules de rayon R, de centre respectifs O₁ et O₂, d'abscisses $+a/2$ et $-a/2$ sur l'axe (Oz), chargées uniformément avec les densités $+\rho_0$ et $-\rho_0$.



$$dV = \pi r^2 dr \quad dV = (\cos\theta)(R dr) \quad dV = (2\pi R)(\rho_0 a) \cos\theta dr$$

$$dq = \sigma dS \quad dq = (\rho_0 a \cos\theta) dS \quad \Rightarrow \sigma = \rho_0 a \cos\theta$$

$$dq = \left(\frac{4\pi R}{\rho_0 a}\right) \rho_0 \cos\theta R dr \quad ds = (2\pi R)(R d\theta)$$

Montrez que la première distribution peut être obtenue comme la limite de la seconde lorsque la distance a tend vers zéro, à condition d'imposer une condition particulière liant ρ_0 , a et σ_0 .

Exercice 7: Lignes de champ d'un dipôle

En coordonnées sphériques un dipôle crée le champ électrique suivant :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2M \cos\theta}{r^3} \vec{u}_r + \frac{M \sin\theta}{r^3} \vec{u}_\theta \right) ; M = \text{constante}$$

$$\left[\frac{dr}{E_r} \right] = 0 \Rightarrow E_r dr - E_\theta d\theta = 0 \Rightarrow \left(\frac{2M \cos\theta}{r^3} \right) dr = \left(\frac{M \sin\theta}{r^3} \right) d\theta \Rightarrow \frac{dr}{2r} = \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta}$$

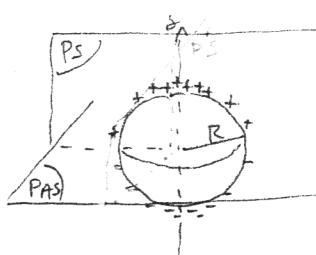
En déduire l'équation des lignes de champ dans le plan (r, θ).

Décrivez l'allure des lignes de champs créées par un dipôle.

$$\ln r/c = \ln \sin\theta \Rightarrow [r = k \sin^2\theta]$$

Electrostatique - TD1 - Exo 5

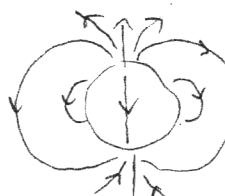
$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$$



$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r, \theta)$$

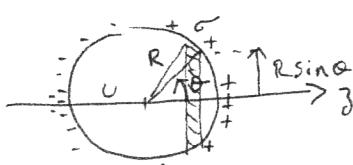
invariance
par
rotation
selon φ

\vec{E} L'ampère équatorial
sur l'axe (Oz) \vec{E} selon \vec{u}_z



► Exo 6

$$dq = \sigma dS$$



$$dq = (2\pi R \sin\theta) \times R d\theta$$

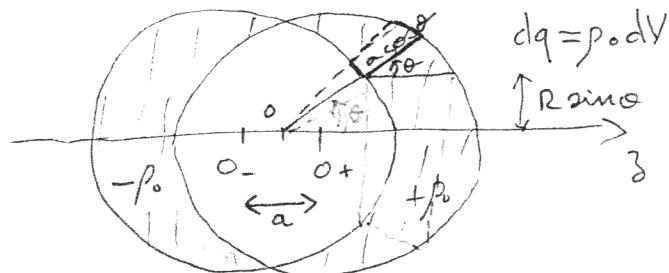
bandelette
circulaire
inclinée.

$$\times R d\theta$$

$$\times \sigma$$

$$dS = (2\pi R \sin\theta) R d\theta$$

$$dq = 2\pi R \sin\theta \underbrace{\sigma \cos\theta}_{\sigma} R d\theta$$



$$dV = ((\cos\theta) \times (R dr)) \times 4\pi r^2 \sin\theta$$

$$dq = 2\pi R \sin\theta \rho₀ a \cos\theta R dr$$

$$\Rightarrow \sigma = \rho₀ a \cos\theta \quad \text{et} \quad \underline{\sigma = \rho₀ a}$$

$a \rightarrow 0$
 $\rho₀ \rightarrow \infty$

Les deux types de distribution sont bien identifiables qd $a \rightarrow 0$.

► Application \vec{E}_{int} créé par la distribution du 5) : Principe de superposition.



$$\vec{E}_{ext} = \frac{4/3 \pi R^3}{4\pi \epsilon_0} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \vec{u}_m$$

$$\vec{E}_{int} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{u}_m = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{u}_m$$

⇒ le champ créé à l'intérieur de la sphère est homogène.

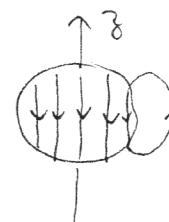
$$D_1 = (\vec{E}_{int})_1 = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{u}_m$$

$$D_2 = (\vec{E}_{int})_2 = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{u}_m$$

$$D_1 + D_2 : \vec{E}_{int} = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{u}_m = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} a \vec{u}_z$$

donc :

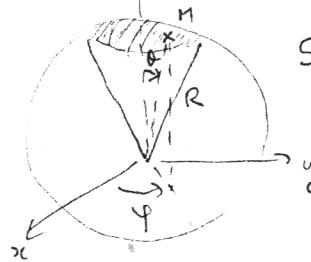
$$\boxed{\vec{E}_{int} = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{u}_z}$$



► TD2 - Exo 1

$$dS = R d\theta \times 2\pi R \sin\theta$$

$$S = 2\pi R^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\alpha} \sin\theta d\theta$$



$$S(R=1) = \pi$$

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\alpha) \quad \#$$

Spire circulaire: $\vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{dI dl}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}\vec{R}}{R^2}$

$\vec{E} \in Ps$ AP's

$$\vec{E} = E \vec{u}_z \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \text{cste} \\ y = \text{cste} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{E = \frac{dR \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 R^2}} \quad E = \frac{QR}{2\pi\epsilon_0 R^2}$$

$(Q) \neq \frac{3}{R}$ en fonction de z . $\vec{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{R^3}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z^3 = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_z^3$ $Q_{tot} = \pi R^2 Q$

disque: superposition de bandes circulaires de rayon r et d'épaisseur dr

densité ρ M \hat{m} sym

épaisseur dr que la spire

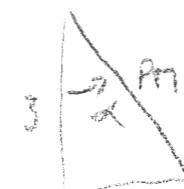
d'après la spire de densité ρ :



$$d\vec{E} = \frac{\rho dr \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_z^3$$

$$dq = \rho dr dl \quad ds = dr dl$$

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_{R=0}^R \frac{x dr \cos \theta}{R^2} \vec{u}_z^3$$



remplace le d
 $dq = \rho dr dl$

$$\tan \theta = \frac{z}{r}, \quad \frac{dl}{\cos \theta} = \frac{dr}{z}$$

$$\cos \theta = \frac{z}{R}$$

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \tan \theta \frac{z dr}{\cos^2 \theta} \cos \theta \frac{\cos^2 \theta}{z^2} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \int_0^\infty \sin \theta dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0} [-\cos \theta]_0^\infty$$

Plan infini $R \rightarrow +\infty$ avec $z = \text{cste}$

$$\varepsilon = \frac{3}{R}$$

$$\alpha_m \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\vec{E}_{\text{plan}} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \vec{u}_z^3}$$

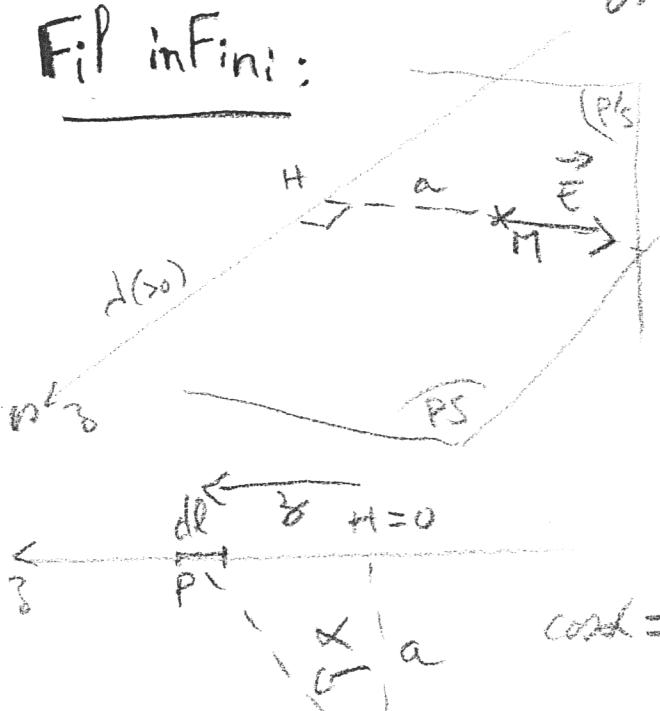
$$\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{3}{\sqrt{R^2+z^2}} \right) \vec{u}_z^3$$

si z grand, disque \approx ponctuel: $\varepsilon = \frac{R}{z}$

$$E \approx \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \right) \approx \frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{1}{2} \varepsilon^2 = \frac{\rho}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{z^2} = \frac{Q_{tot}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2}$$

avec $Q_{tot} = \pi R^2 \rho$ ça marche!

Fil infini:



$$\vec{E} = [\int d\vec{E} \cdot \vec{u}_z] \vec{u}_z$$

$$E = \int \frac{dI}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{Pn} \cdot \vec{u}_z}{Pn^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dz \frac{1}{Pn^2} \cos^2 \theta$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_a^a \frac{dz}{\cos^2 \theta} \frac{\cos^2 \theta}{a^2} \cos^2 \theta$$

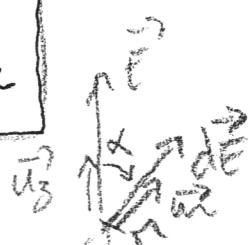
$$\cos^2 \theta = \frac{a}{Pn} \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta d\theta \vec{u}_z$$

$$\tan \theta = \frac{z}{a}$$

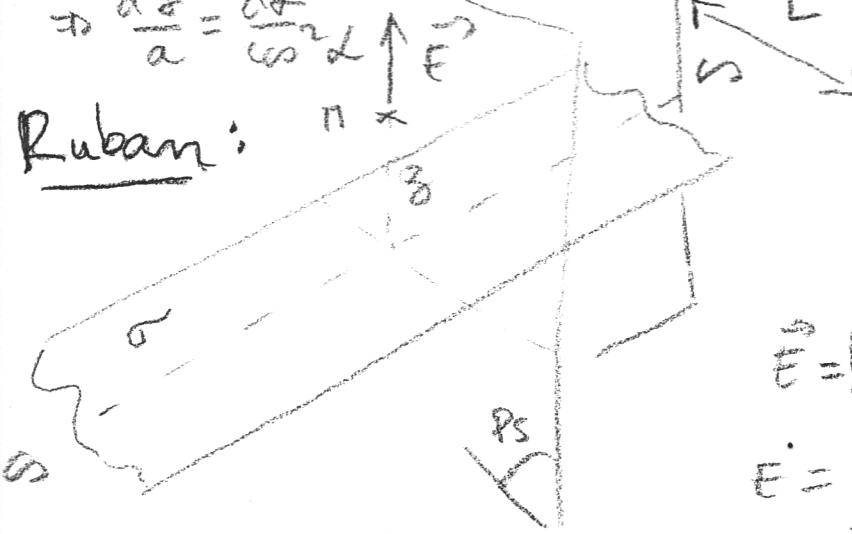
$$dt \tan \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow dz = dt \cos^2 \theta$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 a} \vec{u}_z$$



Ruban:



$$T/z = \text{oste}$$



$$\vec{E} = [\int d\vec{E} \cdot \vec{u}_z] \vec{u}_z$$

$$E = \int dE \cos \theta = \int \frac{\sigma dz \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 Pn}$$

$$\tan \theta = \frac{z}{a} \quad dt \tan \theta = \frac{dz}{\cos^2 \theta}$$

$$= \frac{dz}{a}$$

ON considère une somme de bandeslette infini d'épaisseur dz , d'où d'après le résultat du fil infini: $d\vec{E} = \frac{\sigma dz}{2\pi\epsilon_0 Pn} \vec{u}_z$

$$E = \int \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{z dz \cos \theta \cos \theta}{L^2}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} dz = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} L = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \arctan \frac{2z}{L}$$

$$\tan \theta = \frac{z}{L/2}$$

$$\vec{E}_{\text{ruban}} = \frac{\sigma}{\pi\epsilon_0} \arctan \left(\frac{2z}{L} \right) \vec{u}_z$$

$$\text{Plan } \infty: \alpha_m = \pi/2$$

idem via le disque! YOUPLEX!

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Deuxième TD d' Electrostatique

Exercice 1 : Calculez l'angle solide délimité par un cône de révolution d'angle au sommet 2α .

Réponse : $\Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha)$

.....
EXERCICE 2: Calculer le champ créé par une sphère de rayon R uniformément chargée en volume (densité de charge = ρ) en tout point de l'espace (à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère).

REPONSE:

$$E_{\text{ext}} = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}$$

$$E_{\text{int}} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

(r est la distance au centre de la sphère; le champ est radial-sphérique).

.....
EXERCICE 3: Calculer le champ créé par un plan infini uniformément chargé (densité superficielle σ) en tout point de l'espace.

REPONSE:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (\text{normal au plan})$$

INDICATION: choisir comme surfaces de Gauss des cylindres de génératrices perpendiculaires au plan et de hauteur quelconque.

.....
Exercice 4 : Calculez le champ électrique pour la distribution de charge de l'exo 4 du premier TD d'électrostatique .

Exercice 5 : Soit un cylindre de longueur infinie, de rayon R , portant une densité surfacique de charge σ constante .

Déterminez le champ électrostatique en tout point .

Exercice 6 : même géométrie qu'à l'exo 5 mais avec une densité volumique de charges ρ constante .