

Exercice 1: Établir l'expression du théorème du moment cinétique dans (R^*).

Que constatez-vous de remarquable ?

Réponse: $\left(\frac{d\vec{\omega}^*}{dt} \right)_{R^*} = \vec{M}_G^{ext}$

Résultat non évident car R^* est en général non galiléen.

Exercice 2: 2 personnes dans une banque.

Soit une banque de masse $M = 90 \text{ kg}$ qui dérive le long d'une rivière rectiligne à la vitesse $\vec{v}_o = v_0 \vec{u}_x$ ($v_0 = 1,5 \text{ m.s}^{-1}$) par rapport à la rive. Le passager A une masse $m_A = 40 \text{ kg}$, le B une masse $m_B = 75 \text{ kg}$.

1) A plonge dans l'eau avec une vitesse $\vec{v} = -v \vec{u}_x$ ($v = 2 \text{ m.s}^{-1}$) par rapport à la rive. Quelle sera la vitesse de la banque après le plongeon ?

2) La banque est immobile sur un lac et, A et B échangent leurs places. Des deux passagers étant à la distance L , de quelle distance s'est déplacée la banque ?

Dans quel sens ?

Réponses/indications: 1) $\frac{d\vec{p}}{dt} = M \vec{a}_G = \vec{0}$ $\Rightarrow \vec{p} = \text{cste}$ il y a conservation de la quantité de mouvement !

2) $\vec{v}_G = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_G = \text{cste}$

$$\dots d = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B + M} L$$

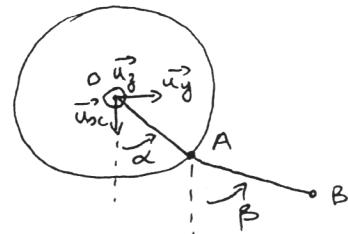
Exercice 3: Quantité de mouvement, moment et énergie cinétique.

Deux points matériels A et B, identiques, de masse m , sont reliés par une tige de masse négligeable et de longueur b . A se déplace sur un cercle de centre o et de rayon b , et la tige AB peut osciller autour d'un axe passant par A et perpendiculaire au plan de la feuille.

Calculer la quantité de mouvement et le moment cinétique en o pour le système AB en fonction des angles α, β et de leurs dérivées :

1) Par un calcul direct.

2) En utilisant la notion de centre de masse et de référentiel barycentrique (Théo. de Koenig).



3) Calculer aussi l'énergie cinétique du système AB par un calcul direct puis en utilisant le deuxième théorème de Koenig



Exercice 4 :

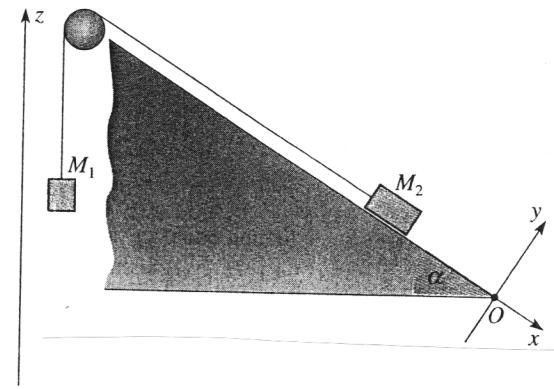
Plan incliné et poulie

Deux objets de masses m_1 et m_2 sont représentés par les points matériels M_1 et M_2 . M_2 glisse sans frottements sur le plan incliné, et ils sont liés par un fil idéal qui passe dans la gorge d'une poulie idéale.

1) En appliquant le théorème du moment cinétique à l'ensemble, fil, poulie et points matériels M_1 et M_2 , déterminer l'accélération de M_1 .

2) Déterminez le travail des forces intérieures.

En déduire par une approche énergétique l'accélération de M_1 .



Systèmes de points matériels et mouvements à force centrale

avec corrections.

Couple sur la glace :

Une femme ($m_A = 60 \text{ kg}$) et un homme ($m_B = 80 \text{ kg}$) se tiennent côté à côté et immobiles sur un lac gelé (on néglige les frottements).

L'homme pousse la femme en appliquant une force constante $F = 15 \text{ N}$. Sachant que son bras a une longueur $l = 70 \text{ cm}$, déterminer leurs vitesses.

Constante de Madelung (sait "Madeloungue")

Nous désirons calculer l'énergie potentielle électrostatique d'un cristal (énergie réticulaire).

Il s'agit d'un cristal ionique formé de N ions de charge $+q$ et de N ions de charge $-q$ ($N \gg 1$).

L'énergie potentielle électrostatique peut se mettre dans le cas général sous la forme :

$$U = -AN \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

où r est la plus courte distance entre deux ions, et A une constante caractéristique (pour le chlorure de sodium par exemple la constante de Madelung vaut 1,75).

Déterminez la valeur de A pour un cristal à une dimension, qui serait constitué d'ions positifs et négatifs disposés alternativement et régulièrement sur une droite.

Quantité de mouvement, moment et énergie cinétique

(Suite de l'exercice 3 du TD sur les systèmes de points matériels)

Nous considérons maintenant un champ de pesanteur $\vec{g} = g \hat{u}_z$, $g > 0$.

4) Écrire l'expression de l'énergie potentielle E_p en fonction de α et β .

5) Expression de l'énergie mécanique E_m . Montrez que pour des petites oscillations elle peut s'écrire :

$$E_m = R \left(\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{2} \right) + S \left(\ddot{\alpha}^2 + \frac{\ddot{\beta}^2}{2} + 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \right) + T$$

où R , S et T sont des constantes.

Quelles sont les expressions de R et S ?

6) Nous effectuons le changement de variable suivant : $\begin{cases} \alpha = (u+v)/\sqrt{2} \\ \beta = (u-v) \end{cases}$

Que devient alors l'expression de l'énergie mécanique?

Que constatez-vous?

7) Donnez l'expression selon u et v , appelées respectivement w_s et w_{as} .

Corrections:

Exercice du cours: machine d'Atwood en considérant M_1, M_2 et la poulie séparément.

- Premier système : M_1 (point matériel)

forces: \vec{P}_1 et \vec{T}_1

$$RFD: m_1 \ddot{\vec{z}}_1 = \vec{P}_1 + \vec{T}_1 = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow m_1 \ddot{\vec{z}}_1 = -m_1 g + T_1 \quad (1)$$

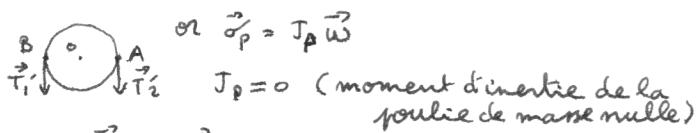
- Deuxième système : M_2 (point matériel)

$$\dots \Rightarrow m_2 \ddot{\vec{z}}_2 = -m_2 g + T_2 \quad (2)$$

- Troisième système : la poulie

$$TMC: \frac{d \vec{\omega}_p}{dt} = \sum \vec{M}_{\text{ext}} = \vec{M}_{T_1} + \vec{M}_{T_2}$$

$$\text{or } \vec{\omega}_p = J_p \vec{\omega}$$



$$\Rightarrow \vec{M}_{T_1} + \vec{M}_{T_2} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_A \wedge \vec{T}_2 + \vec{\omega}_B \wedge \vec{T}_1 = \vec{0}$$

$$\text{or } \vec{\omega}_A = -\vec{\omega}_B \Rightarrow \vec{T}_1 = \vec{T}_2 \quad (3)$$

- Principe des actions réciproques:

$$\vec{T}_1' = -\vec{T}_1 \text{ et } \vec{T}_2' = -\vec{T}_2 \quad (4)$$

$$\bullet (3) \text{ et } (4) \Rightarrow T_1 = T_1' = T_2 = T_2'$$

$$\bullet (1) - (2) \Rightarrow m_1 \ddot{\vec{z}}_1 - m_2 \ddot{\vec{z}}_2 = (m_2 - m_1)g$$

en équation que dans le cours \Rightarrow conclusion.

Exercices du TD sur les systèmes de points matériels:

- Exercice 1: 1^{er} théorème de Koenig:

$$\vec{\omega}(A) = \vec{AG} \wedge M \vec{v}_0 + \vec{\omega}^*$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d \vec{\omega}(A)}{dt} \right)_R = \left(\frac{d \vec{AG}}{dt} \right)_R \wedge M \vec{v}_0 + \vec{AG} \wedge M \left(\frac{d \vec{v}_0}{dt} \right)_R$$

$$\downarrow TMC \quad \underbrace{\quad}_{\text{Tcdm}} \quad \left(\frac{d \vec{\omega}^*}{dt} \right)_R \\ \Rightarrow \vec{M}^{\text{ext}}(A) = \vec{\omega} + \vec{AG} \wedge \vec{R}_{\text{ext}} + \left(\frac{d \vec{\omega}^*}{dt} \right)_R$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d \vec{\omega}^*}{dt} \right)_R = \vec{M}(A) - \vec{AG} \wedge \vec{R}_{\text{ext}} = \vec{M}^{\text{ext}}(G)$$

$$\text{or: } \left(\frac{d \vec{\omega}^*}{dt} \right)_R = \left(\frac{d \vec{\omega}^*}{dt} \right)_{R_0} \quad (R_0 \text{ en translation})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d \vec{\omega}^*}{dt} \right)_{R^*} = \vec{M}^{\text{ext}}(G)$$

Théorème du moment cinétique dans (R^*).

Résultat non évident car (R^*) est un système non galiléen et ici les forces d'inertie n'interviennent pas.

Exercice 2: frottements négligés.

$$1) \frac{d \vec{P}}{dt} = \vec{R}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = \text{conste}$$

$$\Rightarrow (m_A + m_B + M) \vec{v}_0 = m_A \vec{v} + (m_B + M) \vec{v}_0$$

$$\Rightarrow v_0' = \frac{m_A + m_B + M}{m_B + M} v_0 + \frac{m_A v}{m_B + M}$$

$$\text{AN: } v_0' \approx 2,35 \text{ m.s}^{-1}$$

- 2) la position du centre de masse ne change pas

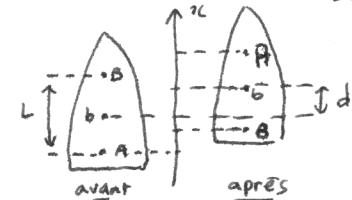
$$(\vec{OG})_i = (\vec{OG})_f \Rightarrow M_A x_A + m_B x_B + M x_{\text{barque}}$$

$$= m_A x_A' + m_B x_B' + M x_{\text{barque}'}$$

$$\text{or: } x_B' = x_B + d$$

$$x_A' = x_A + L + d$$

$$x_B' = x_B - L + d$$



$$\dots \Rightarrow d = \frac{m_B - m_A}{m_B + m_A + M} L$$

$$\text{AN: } d \approx 0,17 L$$

Exercice 3:

$$3) \text{ Calcul direct: } E_C = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 b^2) + \frac{1}{2} m b^2 [(\dot{\beta} \sin \beta + \dot{x} \cos \beta)^2 + (\dot{\beta} \cos \beta + \dot{x} \sin \beta)^2]$$

$$= \frac{1}{2} m b^2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m b^2 [\dot{\beta}^2 \sin^2 \beta + \dot{x}^2 \sin^2 \beta + 2 \dot{x} \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos^2 \beta + \dot{x}^2 \cos^2 \beta + 2 \dot{x} \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta]$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2} m b^2 [2 \dot{x}^2 + \dot{\beta}^2 + 2 \dot{x} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\text{Koenig: } E_C = \frac{1}{2} M v_G^2 + E_C^*$$

$$\frac{1}{2} M v_G^2 = \frac{1}{2} (2m) [(\dot{x} \sin \alpha + \frac{1}{2} \dot{\beta} \sin \beta)^2 + (\dot{x} \cos \alpha + \frac{1}{2} \dot{\beta} \cos \beta)^2] b^2$$

$$= m [\dot{x}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{4} + \dot{x} \dot{\beta} \cos(\alpha - \beta)] b^2$$

$$E_C^* = \frac{1}{2} m (\vec{v}_A^*)^2 + \frac{1}{2} m (\vec{v}_B^*)^2$$

↳

$$\text{Or: } \vec{G_A} = -\vec{G_B} \Rightarrow \vec{v}_A^* = -\vec{v}_B^* -$$

$$\Rightarrow E_C^* = m(\vec{v}_B^*)^2 = \frac{1}{4}mb^2\dot{\beta}^2$$

$$\Rightarrow E_C = mb^2[\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta)]$$

$\Rightarrow \text{m résultat.}$

$$4) E_P = mgb(1-\cos\alpha)$$

$$+ mgb(1-\cos\alpha-\cos\beta) + \text{cste}$$

$$\Rightarrow E_P = mbg(1-2\cos\alpha-\cos\beta) + \text{cste}$$

$$5) E_{\text{in}} = E_C + E_P$$

$$\ll \beta \ll 1 \Rightarrow \cos(\alpha-\beta) \approx 1$$

$$\Rightarrow E_C \approx mb^2[\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}]$$

$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\dot{\alpha}^2}{2} \Rightarrow E_P \approx mbg[-2 + \dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{2}]$$

+ cste

$$\Rightarrow E_{\text{in}} \approx mbg[\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{2}] + mb^2[\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}\dot{\beta}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta}]$$

+ cste

$$\Rightarrow R = mbg ; S = mb^2$$

$$6) \dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{2} = \frac{(u+v)^2}{2} + \frac{(u-v)^2}{2} = u^2 + v^2$$

$$\dot{\alpha}\dot{\beta} = (u+iv)(u-iv)/\sqrt{2} = \frac{u^2}{\sqrt{2}} - \frac{v^2}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow E_{\text{in}} = \left\{ mgbu^2 + mb^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\dot{u})^2 \right\}$$

$$+ \left\{ mgbv^2 + mb^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\dot{v})^2 \right\}$$

+ cste

Nous avons séparé les variables α et β (plus de terme $\dot{\alpha}\dot{\beta}$) et nous obtenons l'expression de l'énergie mécanique d'un 2D oscillateur harmonique spatial! Pour un oscillateur harmonique selon la direction u : $mgb^2u^2 + mb^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\dot{u}^2 = 0$

$$\Rightarrow mb^2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ddot{u} + mgbu = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{u} + \frac{g}{b\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}u = 0 \Rightarrow \ddot{u} + \omega_S^2 u = 0$$

et $\omega_S = \sqrt{\frac{g}{b\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}$

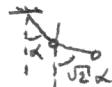
et de m: $\omega_{AS} = \sqrt{\frac{g}{b\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}$

$\omega_{AS} > \omega_S$

Les pulsations sont appelées pulsations propres. Les pulsations correspondent à des modes propres (voir en 2^{ème} année!) Si le système est dans un mode propre à un instant t il y reste $\forall t$.

Donc: si $v=0$ à $t=0$ alors $\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{2}}$ quelque soit t (car $v(t)=0 \forall t$).

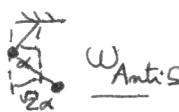
CII:



mode propre de pulsat

WS (symétrique)

Autre mode propre pour:



WAnti-S

En fait ce système est tout à fait analogue au pendule double, vous pouvez faire l'expérience en prenant un fil et deux objets de masses égales.

Exercices:

Couple sur la glace: le travail des forces extérieures est nul: $W_{\text{ext}} = 0$

$$W_{\text{int}} = FL = \Delta E_C = \frac{1}{2}mAv_A^2 + \frac{1}{2}mbv_B^2 - C$$

De plus la quantité de mouvement se conserve $\Rightarrow mAv_A - mbv_B = 0$

$$\Rightarrow N_A^2 = 2F_L \frac{mb}{ma(ma+mb)}$$

$$\underline{AN}: N_A = 2 \text{ m.s}^{-1} \quad N_B = 1,125 \text{ m.s}^{-1}$$

Constante de Madelung: $F_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{d^2}$

$$\dots \begin{matrix} q & -q & +q & -q & +q & -q \dots \end{matrix} \Rightarrow E_{\text{pint}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{d}$$

$$\text{Pour un ions A: } E_{\text{pint}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{(+q)(-q)}{d^2}}_{\text{entre A et B}} \times 2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{(+q)(+q)}{(2d)^2}}_{\text{entre A et C}} + \dots$$

$$\Rightarrow E_{\text{pint}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} \left(-2 + \frac{2}{2} + -\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots \right) = \frac{-2q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

Pour tout le cristal entier il faut multiplier par $2N(2N \text{ ions})$ et diviser par 2 (car chaque paire a été comptée 2 fois)

$$\Rightarrow U = \frac{-2 \ln 2 q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} N \Rightarrow A = 1,39 \text{ ic.}$$