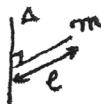


Exercice 1: Calcul de moments d'inertie pour :

- a) une tige rectiligne homogène de longueur l en rotat° autour d'un axe perpendiculaire à passant par son extrémité.



Réponse :  $J_A = \frac{1}{3}ml^2$

- b) même chose pour un axe passant par le centre de la tige : se servir du résultat de la question précédente.

- c) un disque de masse m de rayon R en rotat° autour d'un axe perpendiculaire à son centre.



Réponse :  $J_A = \frac{1}{2}mR^2$

- Que dire de  $J_A$  pour un cylindre ?  
(A selon l'axe de révolution)

- d) Une sphère de rayon R et l'axe A passant par son centre (calcul plus difficile).

Réponse :  $J_A = \frac{2}{5}mR^2$

Exercice 2: Moment cinétique en un point de A.

Calculez le moment cinétique  $\vec{\omega}$  par rapport à un point o fixe de A, axe de rotat°, en utilisant les coordonnées cylindriques ( $\hat{e}_z$  selon A).

Montrez qu'il apparaît alors 2 termes l'un selon les  $\hat{e}_x$  et l'autre selon  $\hat{e}_y$ . En général  $\vec{\omega}$  et  $\vec{\alpha}$  sont-ils colinéaires ?

Calculez aussi  $\vec{r}_{\text{ext}}$ .

Il apparaît alors des forces en  $w^2$  qui peuvent déteriorer l'axe.

Exercice 3: Pendule de torsion .

Un fil métallique vertical dont les extrémités sont fixées, est lié à un cylindre homogène de masse m et de rayon R. Le fil est tendu et il est confondu avec l'axe de symétrie du cylindre.

Lorsque le cylindre tourne d'un angle  $\theta$  par rapport à la position d'équilibre le fil exerce un couple de rappel élastique avec une constante de torsion c. Déterminer la fréquence des oscillations du cylindre.

Que se passe-t-il si le fil n'est pas vertical ?

Indication :  $M_{\text{fil}} = -c\theta$

## Exercice 4

On considère deux disques identiques coaxiaux, de moment d'inertie  $I$  par rapport à leur axe de rotation. Initialement, un disque est immobile, l'autre animé de la vitesse angulaire  $\omega$ .

On met les deux disques en contact par simple translation de l'axe de rotation de l'un deux.

En utilisant une loi de conservation, calculer la vitesse angulaire commune des disques après contact.

L'énergie mécanique du système (supposé isolé) constitué par les deux disques est-elle constante?

Quel est le travail des forces intérieures?

L'énergie d'un système isolé est constante, cela est-il en contradiction avec les résultats de cet exercice?

## Exercice 5

Un cylindre de moment d'inertie  $I$  peut tourner autour d'un axe horizontal fixe passant par son centre. Une masse  $m$  est fixée à un fil, de masse négligeable, enroulé autour du cylindre. On néglige les frottements. La masse est abandonnée sans vitesse initiale.

Calculer la vitesse angulaire du cylindre en fonction du temps.

Correction

Solide en rotation autour d'un axe fixe.

Exercice 2 :  $\vec{\omega}_o(\Delta) * \vec{\sigma}_o(\gamma) = \sum_i \vec{\sigma}_o(m_i) = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge (m_i \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i)$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{hi} + \vec{H}_i \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_o(\gamma) = \sum_i \vec{O}\vec{H}_i \wedge (m_i \vec{\omega} \wedge \vec{H}_i \vec{r}_i) + \sum_i \vec{H}_i \vec{r}_i \wedge (m_i \vec{\omega} \wedge \vec{H}_i \vec{r}_i)$$

$$\vec{O}\vec{H}_i = z_i \vec{e}_3 ; \vec{H}_i \vec{r}_i = p_i \vec{e}_3 ; p_i = H_i M_i ; \vec{\omega} = \omega \vec{e}_3$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_o(\gamma) = \sum_i m_i p_i z_i \omega \vec{e}_3 \wedge (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3) + \sum_i m_i p_i^2 \omega \vec{e}_3 \wedge (\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_o(\gamma) = \underbrace{-\left(\sum_i m_i p_i z_i \right) \omega}_{\text{orthogonal à } \vec{\omega}} + \underbrace{\left(\sum_i m_i p_i^2\right) \vec{\omega}}_{\text{selon } \vec{\omega}}$$



$\Rightarrow$  En général  $\vec{\omega}_o$  n'est pas colinéaire à  $\vec{\omega}$ , il faudrait que  $\sum_i m_i p_i z_i = 0$

$$* \vec{M}_{o,\text{ext}} = \sum_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i}$$

$$\vec{M}_{o,\text{ext}} = \frac{d \vec{\omega}_o}{dt} = J_o \ddot{\omega} \vec{e}_3 - \sum_i m_i p_i z_i \omega^2 \vec{e}_3 - \sum_i m_i r_i z_i \ddot{\omega} \vec{e}_3$$

en rotation uniforme :  $\vec{M}_{o,\text{ext}} = -\left(\sum_i m_i p_i z_i \right) \omega^2$ , m en rotation uniforme  
il apparaît des forces en  $\omega^2$  qui déforment l'axe :  $\text{axe } \parallel \rightarrow \text{axe } \not\parallel \vec{M}_{o,\text{ext}}$

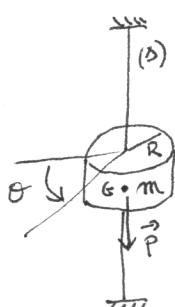
Exercice 3 : \* Théorème du moment cinétique :  $J_o \frac{d\omega}{dt} = \vec{M}_{o,\text{ext}}$

$$\vec{M}_{(P)} = \vec{0} \text{ car } \vec{p} \text{ selon } (D).$$

$$M_{o,\text{ext}} = -C\theta$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} m R^2\right) \ddot{\theta} = -C\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{J_o} \theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{C}{J_o}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{J_o}{C}}$$



$$* G \in (D) \Rightarrow \vec{M}(P) = \vec{0} , ça ne change rien .$$