E) Energie potentielle d'interaction

1) Energie potentielle d'une charge dans un champ :

$$\delta W = \vec{F}\cdot\vec{d\ell} = q\vec{E}\cdot\vec{d\ell} = -q\vec{\nabla}V\cdot\vec{d\ell} = -d(qV)$$

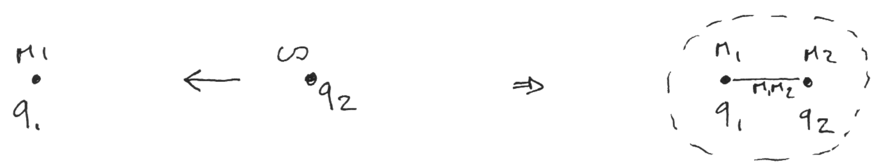
$$\Rightarrow \quad W_{AB} = -q(V_B - V_A) \qquad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_p = qV}$$

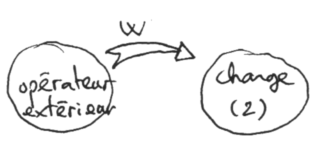
$$\vec{F} = q\vec{E} = -\vec{\nabla}\mathcal{E}_p$$

2) Energie (potentielle) d'interaction :

Energie fournie par un opérateur pour constituer la distribution de charges.

Exemple pour 2 charges ponctuelles :
Initialement les 2 charges sont hors interaction (infiniment éloignées l'une de l'autre). Plaçons la charge 1 puis amenons de l'∞ la charge 2 à une distance M_1M_2 :





$$\underset{(\text{reçu})}{W_{op}} = -\underset{(\text{reçu})}{W_{charge}}$$

$$\mathcal{E}_{p_{int}} = -W_{op} = \underset{\text{par l'op.}}{W_{fourni}} = +W_{charge} = -\Delta\mathcal{E}_p$$

$$\underset{\infty \to M_2}{\underset{(2)}{W_{charge}}} = -q_2(V_{M_2} - V_\infty) = -q_2 V_{M_2}$$

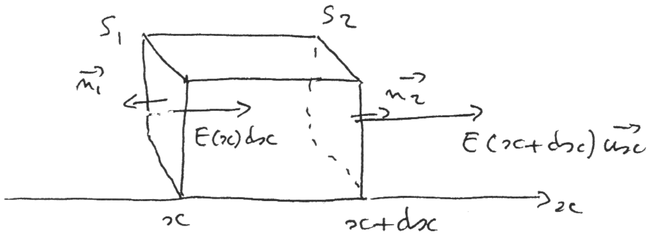
$$= -q_2 \times \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{M_1M_2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{p_{int}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{M_1M_2}}$$

(Remq : $\underset{\infty \to M_1}{\underset{(1)}{W_{charge}}} = 0$, q_2 n'étant pas alors présente)

F - Application du théorème de Gauss à un volume mésoscopique :

A une dimension :



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\iiint_V \rho\, dv}{\varepsilon_0} \Rightarrow \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$S = S_1 = S_2$

$$= -E(x)\,S + E(x+dx)\,S$$

$$= \frac{\partial E}{\partial x}\,dx\,S = \frac{\partial E}{\partial x}\,dv$$

$Q_{int} = \rho\, dv$ (vol. mésoscopique)

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

or : $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ 1D $\Rightarrow$ $E = -\frac{\partial V}{\partial x}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

en 3D : $\boxed{\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$ $\left(\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)$

en absence de charges : $\boxed{\Delta V = 0}$ Equation de LAPLACE

TD3 Exo 3 exo d'application. / ivs de la feuille d'exo.

Rmq :
- En coord sphér. : si $V(r)$, $\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)$
- En coord cyl. : si $V(r)$, $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial V}{\partial r}\right)$
- ↳ Expressions données dans un énoncé.