PCSI

Exercices
Théorème de Gauss.
Calcul de $\vec{E}$ et V.

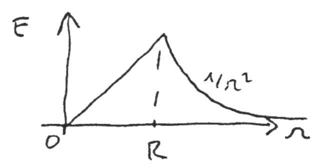
Comment déterminer V connaissant $\vec{E}$?

→ On utilise $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ puis la continuité de V pour déterminer les constantes d'intégration (en plus des conditions aux limites)

Pour que le champ électrique existe il faut que V soit dérivable (car $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$) et donc continu.

Exercice 2 (TD2) : Champ créé par une sphère uniformément chargée.

Théo. de Gauss ⇒ $\boxed{E_{ext} = \frac{R^3 \rho}{3 \varepsilon_0 r^2}}$ $\boxed{E_{int} = \frac{\rho r}{3 \varepsilon_0}}$



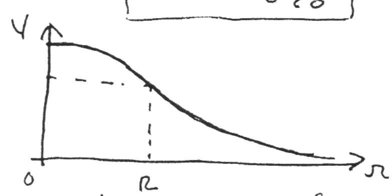
Et le potentiel ?

$$\begin{cases} V_{ext} = \frac{R^3 \rho}{3 \varepsilon_0} \frac{1}{r} + C_{ext} \\ V_{int} = -\frac{\rho r^2}{6 \varepsilon_0} + C_{int} \end{cases}$$

$\lim_{r \to +\infty} V = 0 \Rightarrow \boxed{C_{ext} = 0}$

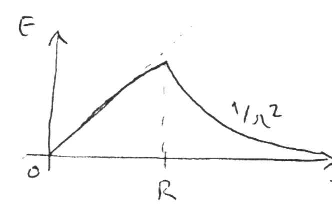
Continuité ⇒ $V_{ext}(R) = V_{int}(R) \Rightarrow \frac{R^2 \rho}{3 \varepsilon_0} = -\frac{\rho R^2}{6 \varepsilon_0} + C_{int} \Rightarrow \boxed{C_{int} = \frac{\rho R^2}{2 \varepsilon_0}}$

$\Rightarrow \boxed{V_{ext} = \frac{\rho R^3}{3 \varepsilon_0} \frac{1}{r}}$ $\boxed{V_{int} = \frac{\rho}{6 \varepsilon_0} (3R^2 - r^2)}$



Et nous obtenons une fonction décroissante ce qui est cohérent avec un champ radial dirigé vers l'extérieur ($\vec{E}$ est orienté selon les potentiels décroissants)

Exercice 4 (TD2) : $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - a \frac{r^2}{R^2}\right)$



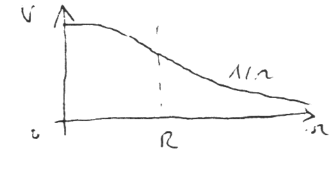
Théo. de Gauss ⇒ $\boxed{E_{ext} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{5}\right) \frac{R^3}{r^2}}$ $\boxed{E_{int} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r}{3} - a \frac{r^3}{5R^2}\right)}$

$$\begin{cases} V_{ext} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{5}\right) \frac{R^3}{r} + C_{ext} \\ V_{int} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(-\frac{r^2}{6} + a \frac{r^4}{20 R^2}\right) + C_{int} \end{cases}$$

$\to \boxed{C_{ext} = 0}$

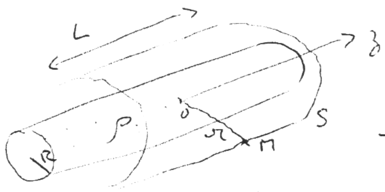
$\to \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{5}\right) R^2 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} R^2 \left(-\frac{1}{6} + a \frac{R^2}{20}\right) + C_{int} \Rightarrow C_{int} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} R^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{a}{5} - \right.$

$\Rightarrow \boxed{V_{ext} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{a}{5}\right) \frac{R^3}{r}}$ $\boxed{V_{int} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{aR^2}{5} - a \frac{R^4}{20} - \frac{r^2}{6} + a \frac{r^4}{20 R^2}\right)}$



↪

Exercice 6 (TD2)



Symétries $\underset{\text{cyl.}}{\overset{\text{coord.}}{\Rightarrow}}$ $\vec{E} = E\,\vec{u_\rho}$, $E(\rho)$

Théo. de Gauss : Surface de gauss cylindre d'axe (Oz) de longueur quelconque, $\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\,2\pi r L$

M ext : $Q_{int} = \pi R^2 L \rho$

M int : $Q_{int} = \pi r^2 L \rho$

$\Rightarrow \quad E_{ext} = \dfrac{\pi R^2 \cancel{L} \rho}{\varepsilon_0 2 \cancel{\pi} r \cancel{L}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{ext} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}}$

$\Rightarrow \quad E_{int} = \dfrac{\cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cancel{L} \rho}{\varepsilon_0 2 \cancel{\pi} \cancel{r} \cancel{L}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{int} = \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_{ext} = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln r + C_{ext} \\ V_{int} = -\dfrac{\rho r^2}{4\varepsilon_0} + C_{int} \end{cases}$$

Cette fois nous ne pouvons prendre le potentiel nul à l'infini car il y a des charges à l'infini. Nous choisissons de le prendre nul en $r = R$.

$V_{ext}(r = R) = 0 \Rightarrow C_{ext} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln R \Rightarrow \boxed{V_{ext} = -\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0} \ln\left(\dfrac{r}{R}\right)}$

$V_{ext}(R) = V_{int}(R) \Rightarrow \quad 0 = -\dfrac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} + C_{int} \Rightarrow \boxed{V_{int} = \dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}(R^2 - r^2)}$