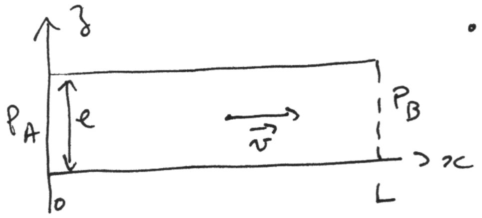
Écoulement de Poiseuille Plan :

écoulement stationnaire, laminaire et incompressible.

éq. d'Euler : $\vec{0} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$

* Écoulement horizontal, la gravité n'intervient pas :



• $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x(x,y,z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

• invariance par translation selon y : $v_x(x,z)$

• incompressible : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow v_x(z) = v(z)$

• $P(x,y,z) \xrightarrow[\text{trans.}]{\text{inv.}} P(x,z)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \Rightarrow P(x) \end{cases}$$

gradient du à la gravité négligé.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{dP}{dx}}_{\text{fonction de } x} = \underbrace{\eta \frac{d^2 v}{dz^2}}_{\text{fonction de } z} \quad \forall (x,z)$$

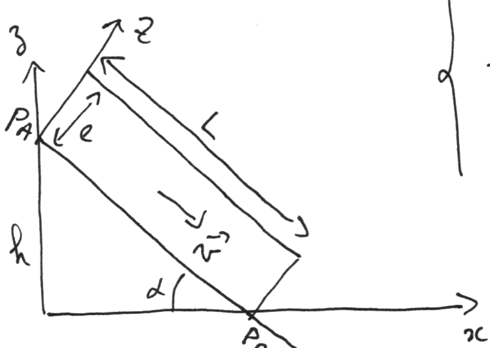
$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = \text{constante}$

$\Rightarrow \frac{dP}{dx} = \frac{P_B - P_A}{L} = \frac{\Delta P}{L}$

$$\Rightarrow \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\Delta P}{\eta L} \Rightarrow v = \frac{\Delta P}{2\eta L} z^2 + Cz + D \quad \begin{cases} v(0) = 0 \\ v(e) = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{\Delta P}{2\eta L}(z-e)z$$

contrairement ($\Delta P < 0$) à ici on prend souvent ΔP en valeur positive.

* Conduite inclinée :



$$\begin{cases} -\frac{\partial P}{\partial X} + \rho g \sin\alpha + \eta \frac{\partial^2 v(Z)}{\partial Z^2} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial Y} = 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial Z} - \rho g \cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow P = -\rho g Z \cos\alpha + f(X)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\eta \frac{d^2 v(Z)}{dZ^2}}_{f^n\, Z} = \underbrace{\frac{df(X)}{dX} - \rho g \sin\alpha}_{f^n\, X} \Rightarrow \frac{df}{dX} = \text{cte}$$

En $Z = 0$, $P = f(X)$

$$\begin{cases} f(X=0) = P_A \\ f(X=L) = P_B \end{cases} \Rightarrow \frac{df}{dX} = \frac{P_B - P_A}{L} = \frac{\Delta P}{L} \Rightarrow \frac{d^2 v(Z)}{dZ^2} = \frac{\Delta P - \rho g \sin\alpha\, L}{L} = \frac{\Delta P'}{L}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\Delta P'}{2\eta L}(Z-e)Z$$

On peut aussi poser une pression effective : $-\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} = -\vec{\nabla}(P + \rho g z) = -\vec{\nabla} P'$

avec $P' = P + \rho g z$ et on a une démonstration du même type que dans le premier cas : $\Delta P' = P_B + \rho g z_B - P_A - \rho g z_A = \Delta P - \rho g h$.