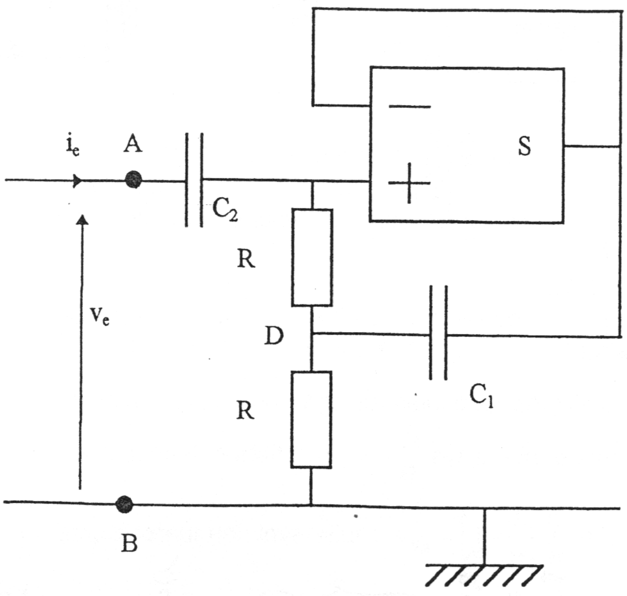
Montage équivalent à un circuit RLC série

On considère le dipôle AB ci-dessous, l'AO étant supposé idéal et en régime linéaire.



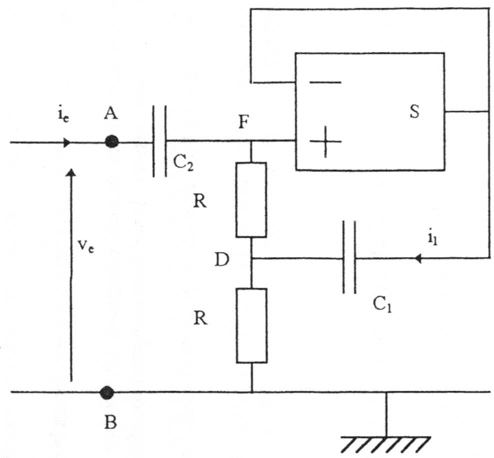
On note $\underline{V}_e$ et $\underline{I}_e$ respectivement l'amplitude complexe de la tension d'entrée $v_e(t)$ et celle du courant d'entrée $i_e(t)$, en régime sinusoïdal forcé.

1. Calculer le rapport $\underline{Z}_e = \underline{V}_e / \underline{I}_e$, appelé impédance d'entrée du dipôle (en fonction des caractéristiques du circuit et de la pulsation ω).

2. Montrer que le dipôle est équivalent à un dipôle R_e L_e C_e série : on déterminera les éléments R_e, L_e et C_e.

3. Donner l'expression de la pulsation ω_0 (résonance d'intensité du dipôle). Calculer son facteur de qualité Q en fonction de C_1 et C_2. *Application numérique* : On donne C_1 = 100 µF ; C_2 = 1 pF. Calculer Q. Conclusion ?

Montage équivalent à un circuit RLC série



1. L'AO étant idéal, le courant dans la résistance située entre F et D est i_e, et le potentiel de F est égal au potentiel de S. On en déduit en exprimant les tensions à l'aide des courants et des impédances complexes :

$$\underline{V_e} - \underline{V_D} = \left(R + \frac{1}{jC_2\omega}\right)\underline{I_e} \qquad \text{d'où} \qquad \underline{V_D} = \underline{V_e} - \left(R + \frac{1}{jC_2\omega}\right)\underline{I_e} \quad (1)$$

$$\underline{V_s} - \underline{V_D} = R\underline{I_e} = \frac{\underline{I_1}}{jC_1\omega} \quad \text{on déduit } \underline{I_1} \text{ en fonction de } \underline{I_e} \qquad \underline{I_1} = jC_1\omega R\underline{I_e}$$

Par ailleurs : $\underline{V_D} = R\left(\underline{I_e} + \underline{I_1}\right)$ d'où $\underline{V_D} = R\underline{I_e}\left(1 + jRC_1\omega\right)$ (2)

En comparant les deux expressions de $\underline{V_D}$ on déduit :

$$\underline{V_e} - \left(R + \frac{1}{jC_2\omega}\right)\underline{I_e} = R\left(1 + jRC_1\omega\right)\underline{I_e}$$

$$\underline{V_e} = \left(2R + j\left[R^2C_1\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right]\right)\underline{I_e}$$

D'où l'impédance d'entrée $\underline{Z_e} = \underline{V_e} / \underline{I_e}$:

$$\boxed{\underline{Z_e} = 2R + j\left[R^2C_1\omega - \frac{1}{C_2\omega}\right]}$$

2. L'impédance d'un dipôle R_e L_e C_e série étant $\underline{Z} = R_e + j\left[L_e\omega - \dfrac{1}{C_e\omega}\right]$, on déduit, en identifiant :

$$\boxed{R_e = 2R \;;\; L_e = R^2C_1 \;;\; C_e = C_2}$$

3. La pulsation de résonance d'un dipôle R_e L_e C_e série est $\dfrac{1}{\sqrt{L_eC_e}}$. On en déduit la pulsation de résonance du dipôle AB :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1C_2}}}$$

⚠ : ici $\tau = \frac{L}{R}$ et non RC.

Le facteur de qualité est $Q = \dfrac{L_e\omega_0}{R_e}$ $\boxed{Q = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{C_1}{C_2}} = 5000}$: très grand.

On obtient un facteur de qualité largement supérieur à celui auquel conduirait l'utilisation d'une bobine.