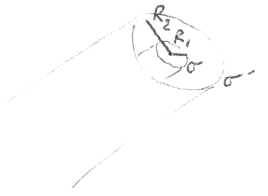
# PARTIE I :

## Capacité d'un câble coaxial

Nous considérons un condensateur cylindrique infini. L'armature intérieur possède un rayon $R_1$ et l'armature extérieur un rayon $R_2$.

1) L'armature intérieur possède une densité surfacique de charge $+\sigma$, sachant que le condensateur est globalement neutre quelle est la densité surfacique $\sigma^-$ de l'armature extérieure ?




2) Déterminez la direction, le sens et l'intensité du champ électrique entre les armatures.

3) En déduire l'expression du potentiel V sachant que celui-ci vaut $V_0$ sur l'armature centrale et zéro sur l'armature extérieure (masse).

4) Retrouvez l'expression de V en utilisant l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.
En coordonnées cylindriques : $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

5) Exprimez $\sigma$ en fonction de $V_0$, $R_1$ et $R_2$.

6) La capacité est défini par la relation : $Q = C\,U$
U : différence de potentiel entre les armatures.
Q : charge sur l'armature de plus haut potentiel.

Déterminez la capacité linéique $c$ du câble coaxial en fonction de $R_1$ et $R_2$.

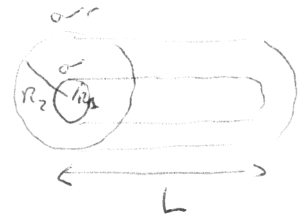
AN : $R_1 = 0{,}5$ mm $\quad R_2 = 5$ mm $\quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\,10^9$ SI

(11)

## PARTIE I - Capacité d'un câble coaxial

1 1) $Q$ : charge sur l'armature intérieure
$Q'$ : " " " extérieure } neutralité $\Rightarrow Q + Q' = 0$

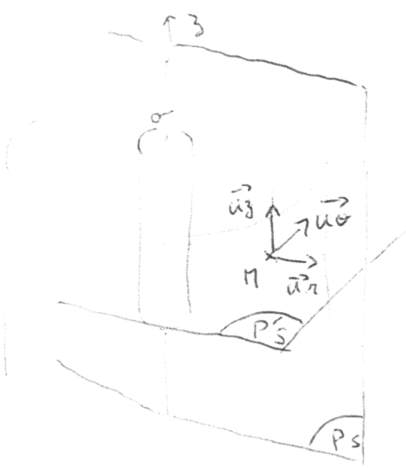
Sur une longueur $L$ de câble :



$\sigma(2\pi R_1 L) + \sigma'(2\pi R_2 L) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\sigma' = -\sigma \frac{R_1}{R_2}}$

1 2)

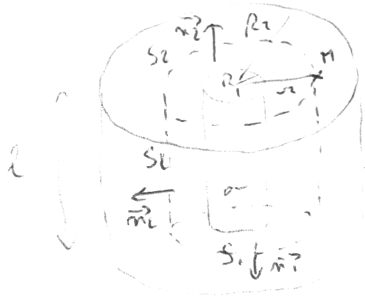


Symétries :

* $\vec{E}$ appartient à $P_S$ et $P'_S$, il est donc radial (coordonnées cyl.) :
$\vec{E} = E_r(r, \theta, z)\,\vec{u_r}$
* Invariance par translation selon $zz'$ :
$\vec{E} = E_r(r, \theta)\,\vec{u_r}$
* Invariance par rotation selon $\theta$ :
$\underline{\vec{E} = E_r(r)\,\vec{u_r} = E(r)\,\vec{u_r}}$

Si $\sigma > 0$ $\vec{E}$ est orienté selon $\vec{u_r}$.

3 Applicat° du théorème de Gauss :



* Surface de Gauss cylindre d'axe $zz'$ de rayon $r$ et de longueur $l$ passant par $M$
* flux sortant de $S$ : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_L$

$$\phi = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S_1} + \iint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S_2} + \iint_{S_L} \vec{E}\cdot d\vec{S_L}$$

$\vec{dS_1} = -\vec{u_z}\,dS_1 \Rightarrow \iint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S_1} = \iint_{S_1} (E\vec{u_r})\cdot(-\vec{u_z}\,dS_1) = 0$

$d\vec{S_2} = \vec{u_z}\,dS_2 \Rightarrow \iint_{S_2} \vec{E}\cdot \vec{dS_2} = 0$

$\vec{dS_L} = \vec{u_r}\,dS_L \Rightarrow \iint_{S_L} \vec{E}\cdot\vec{dS_L} = \iint_{S_L} E\,dS_L \underset{\text{sur } S_L}{\overset{E = cst}{=}} E \iint dS_L = E S_L = \underline{E\, 2\pi r\, l = \phi}$

* Charge intérieure : $Q_{int} = 2\pi R_1 \sigma\, l$
* Théo. de Gauss : $\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\frac{1}{r}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_1}{r}\,\vec{u_r}}$

1,5 3) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ $\qquad \vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u_z} = -E\vec{u_r}$

$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = -E = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R_1}{r} \Rightarrow V(r) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}R_1 \ln r + \text{cste}$

Cond. aux limites : $V(R_2) = 0 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}R_1 \ln R_2 + \text{cste}$

$\Rightarrow \boxed{V(r) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}R_1 \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)}$ [ ou avec l'autre condition : $V(r) = -\frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + V_0$ ]

2 4) $V(r,\theta,z)$, par invariance par rotation selon $\theta$ et translat° selon $z$ : $V(r)$

$\Delta V = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r}$

$\Rightarrow \underline{V(r) = A\ln r + B}$

CL : $\begin{cases} V(R_1) = V_0 = A\ln R_1 + B \\ V(R_2) = 0 = A\ln R_2 + B \end{cases} \Rightarrow A = V_0 / \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$ et $B = -\frac{V_0 \ln R_2}{\ln(R_1/R_2)}$

$\Rightarrow V(r) = \frac{V_0 \ln r}{\ln(R_1/R_2)} - \frac{V_0 \ln R_2}{\ln(R_1/R_2)} \Rightarrow \boxed{V(r) = V_0\frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}}$

1 5) 3) $\Rightarrow V(R_2) = 0 = -\frac{\sigma R_1}{\varepsilon_0}\ln(R_2/R_1) + V_0 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{\varepsilon_0 V_0}{R_1 \ln(R_2/R_1)}}$

6) $C = \frac{Q}{U} \Rightarrow \mathcal{C} = \frac{q}{U}$ $\quad$ q : capacité de l'armature centrale par unité de longueur.

$q = \sigma(2\pi R_1 \times 1)$ $\qquad U = V_0 - 0 = V_0$

1 $\Rightarrow \mathcal{C} = \frac{\varepsilon_0 V_0}{R_1 \ln(R_2/R_1)} \times 2\pi R_1 \times \frac{1}{V_0} \Rightarrow \boxed{\mathcal{C} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}}$

0,5 AN : $\underline{\mathcal{C} \approx 24\,\text{pF.m}^{-1}}$