PCSI
4h

Composition de Physique

le 31 mai 2010

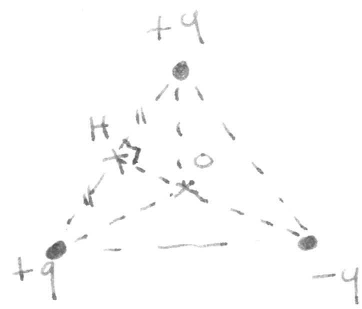
Électrostatique

Exercice 1 : Soient 2 charges électriques en O ($+2q$) et A ($+q$). $d = OA$. Nous plaçons un axe des x d'origine O.

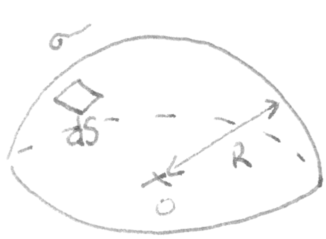
Nous nous intéressons au champ électrique $\vec{E}$ en un point M sur le segment OA.

1) En utilisant les symétries montrez que $\vec{E}$ est selon l'axe des x.
2) Déterminez pour quelle valeur de x le champ s'annule.
3) Placez sur un schéma ce point appelé M.

Exercice 2 : Soient trois charges $+q$, $+q$ et $-q$, placées au sommet d'un triangle équilatéral de coté a.
Déterminez le champ électrique en O et H.



Exercice 3 : Soit un hémisphère de rayon R et de charge surfacique uniforme σ.



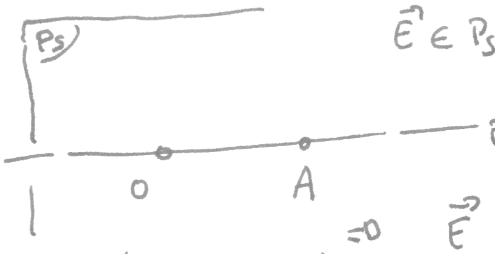
1) Déterminez la charge totale Q de la distribution.
2) Qu'elles informations donnent les symétries sur le champ électrique en O ?
3) Pour un élément de surface dS tracez le champ électrique $d\vec{E}$ correspondant. Expression de $d\vec{E}$.
4) Expression de dS en coordonnées sphériques. Définir θ et ϕ.
5) Poser l'intégrale pour le calcul de $\vec{E}$. Expression de $\vec{E}$.
6) Si l'on considère maintenant une sphère complète de densité surfacique σ constante, quel est le champ en son centre ?

Correction DS 31/5/2010

Électrostatique :

PCSI Physique

Exercice 1 : 1) $M \in P_S \Rightarrow \vec{E}(M) \in P_S$

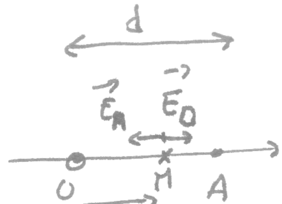


$\vec{E} \in P_S \cap P'_S$

$\Rightarrow \vec{E}$ selon (OA)

et donc l'axe des x.

2)



$q>0$

$\vec{E}_A = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{AM}}{AM^3}$ $\qquad \vec{E}_O = \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{OM}}{OM^3}$

$OM = x \qquad AM = d-x$

Projeté sur Ox : $-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{(d-x)^2} + \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x^2} = 0$

$\Rightarrow 2(d-x)^2 = x^2$

$\Rightarrow \sqrt{2}(d-x) = \pm x$

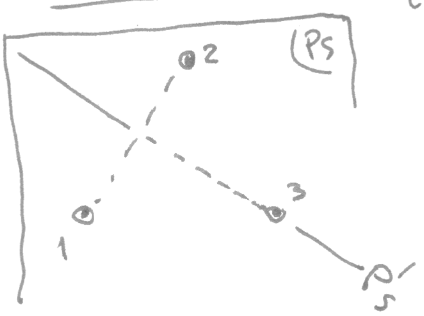
$\Rightarrow \sqrt{2}\,d = (\sqrt{2}\pm 1)x$

$\Rightarrow \boxed{x = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}d}$ car $x<d$ sur $[OA]$

$= (2-\sqrt{2})d$

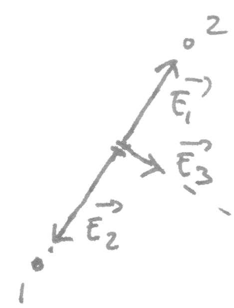
3) $x \simeq \dfrac{3/2}{3/2+1}d \simeq \dfrac{3}{5}d$

Exercice 2 :



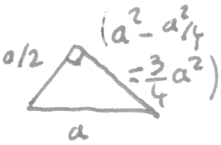
$\vec{E} \in P_S \cap P'_S \Rightarrow \vec{E}$ selon (OH) $\qquad \vec{u} = \dfrac{\vec{HO}}{\|\vec{HO}\|}$

H : $(q>0)$



Par symétrie : $\vec{E}_2 = -\vec{E}_1$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_H = \vec{E}_3 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{4}{3a^2}\vec{u}}$

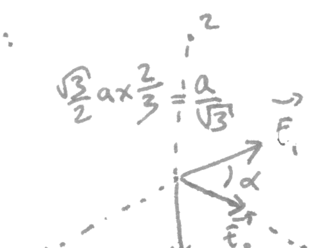


$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

Principe de superposition

$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$

O :



$E_1\cos\alpha = E_2\cos\alpha$

$E_3 = E_1 = E_2$

$= \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3}{a^2}$

$\Rightarrow \vec{E} = [E_3 + 2E_1\cos\alpha]\vec{u}$

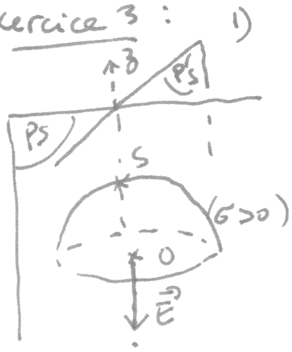
$\Rightarrow \vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{3}{a^2}\left(1+2\cos\dfrac{\pi}{3}\right)\vec{u}$

$\boxed{\vec{E}_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{6}{a^2}\vec{u}}$

Exercice 3 : 1) $Q = \displaystyle\int_{\mathcal{D}} dq = \iint_{\text{hémisphère}} \sigma\, d^2S$ or $\sigma = cste \Rightarrow Q = \sigma S$

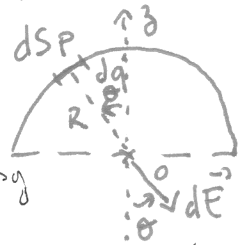
$\boxed{Q = 2\pi R^2\sigma}$

2)



$\vec{E} \in P_S \cap P'_S = (OS) \Rightarrow \vec{E}$ selon z

3)



$d\vec{E} = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{PM}}{PM^3}$ $\qquad P=O$

$d\vec{E} = \dfrac{\sigma\, dS}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{R^2}(-\vec{u}_r)$

4) $dS = R\,d\theta\, R\sin\theta\, d\varphi$

5) $\vec{E} = \iint_S d\vec{E}$

en projetant $\vec{E} = \left[\iint_S (d\vec{E}\cdot\vec{u}_z)\right]\vec{u}_z$

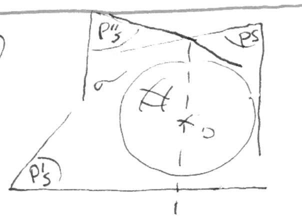
$\Rightarrow E = \displaystyle\int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\dfrac{-\sigma\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)R^2\, d\varphi\, \sin\theta\cos\theta\, d\theta$

$E = -\dfrac{\sigma}{8\pi\varepsilon_0}2\pi\times 1$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0}\vec{u}_z}$

$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \left[\dfrac{-1}{2}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2}$

6)



$\vec{E} \in P_S \cap P'_S \cap P''_S$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_0 = \vec{0}}$