Interrogation

Le 8 juin 2001

Utilisation du théorème de Gauss.

Exercice 1 : Modèle d'atome

Nous considérons un atome non ionisé constitué d'un noyau considéré ponctuel de charge $+Q$, et d'un nuage électronique délimité par deux surfaces sphériques de rayons r_1 et r_2 centrées sur le noyau.
La zone où circulent les élections est supposée avoir un densité volumique de charge $-\rho$ uniforme $(r_1 \leq r \leq r_2)$.

1) Exprimez ρ en fonction de r_1, r_2 et Q.
2) Déterminez le champ électrique $\vec{E}$ en fonction de r, r_1, r_2 et Q si :

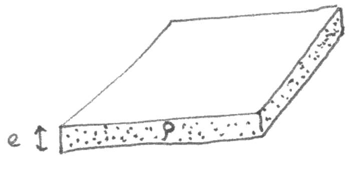
   α) $r \in]0, r_1[$

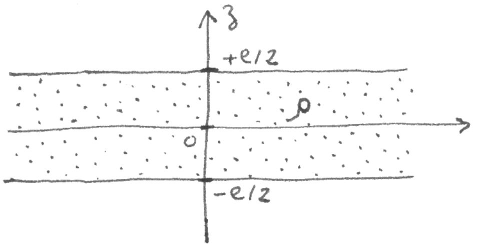
   β) $r \in [r_1, r_2]$

   γ) $r \in]r_2, +\infty[$

Exercice 2 : Nappe infinie

Soit un nappe plane infinie de densité volumique de charge ρ uniforme et d'épaisseur e.



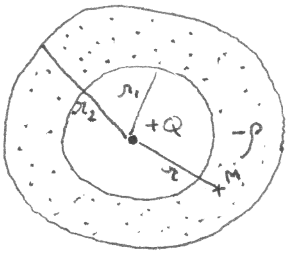


1) Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ en tout points de l'espace (On prendra soin de préciser le signe de z pour certaines expressions).
2) Tracer E en fonction de z (E : projection de $\vec{E}$ selon l'axe (Oz)).
3) Déterminer le potentiel V. Celui-ci sera pris nul sur le plan $z=0$.
4) Tracer $V(z)$.

Correction de l'interrogation

Utilisation du théorème de Gauss

Exercice 1 : Modèle d'atome



1) Un atome non ionisé est neutre : $Q_{tot.} = 0$

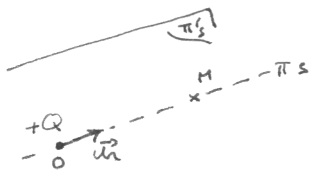
charge du noyau : $+Q$

charge du nuage électronique : $-\rho V$

avec : $V = \frac{4}{3}\pi r_2^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3$

$\Rightarrow \quad Q_{tot} = +Q - \rho \frac{4}{3}\pi (r_2^3 - r_1^3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \dfrac{Q}{\frac{4}{3}\pi (r_2^3 - r_1^3)}}$

2) Utilisons tout d'abord des considérations générale de symétrie :

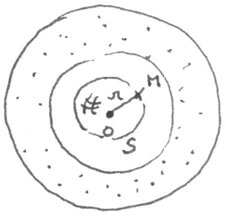


$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} \in \pi_s \\ \vec{E} \in \pi_s' \end{array} \right. \Rightarrow \vec{E} \in (OM) \Rightarrow \vec{E} = E\,\vec{u_r}$

Invariances par rotation selon θ et φ : $E(r,\theta,\varphi) = E(r)$

$\Rightarrow \quad \underline{\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}}$

Calcul du flux :



S : sphère de Gauss

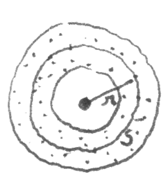
$\vec{dS} = \vec{n}\, dS$ avec $\vec{n} = \vec{u_r}$

$\vec{E}.\vec{dS} = E(r)\,\vec{u_r}.\vec{u_r}\, dS = E(r)\, dS$

$\phi_S = \oiint \vec{E}.\vec{dS} = \oiint E(r)\, dS$, $E(r) = \text{cste sur } S \Rightarrow \phi_S = E(r) \oiint_S dS$

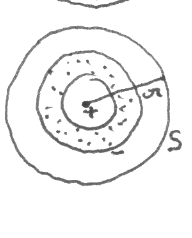
$\Rightarrow \quad \underline{\phi_S = 4\pi r^2 . E(r)}$

α) $Q_{int} = +Q$ Théo. de Gauss : $\phi_S = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u_r}}$



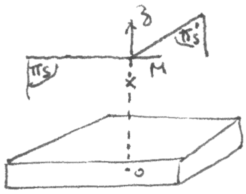
β) idem α) pour ϕ_S. $Q_{int} = +Q - \rho\left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r_1^3\right) \overset{1)}{=} Q\left[1 - \dfrac{r^3 - r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\right]$

Théo. de Gauss : $\phi_S = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(1 - \dfrac{r^3 - r_1^3}{r_2^3 - r_1^3}\right)\vec{u_r}}$



γ) idem α) pour ϕ_S. $Q_{int} = Q_{tot} = 0 \Rightarrow 4\pi r^2 E = 0, r \neq 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0}}$

Exercice 2 : 1)



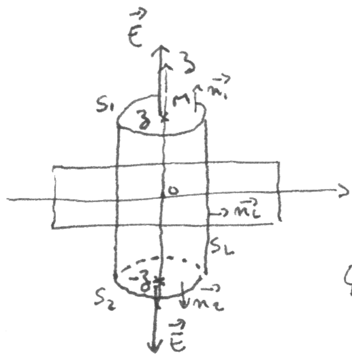
$\vec{E} \in \Pi_S \cap \Pi_S' \Rightarrow \vec{E} = E\,\vec{u_z}$

invariances par translation selon x et y :

$E = E(x,y,z) = E(z)$

$\Rightarrow \underline{\vec{E} = E(z)\,\vec{u_z}}$ (que M soit à l'intérieur ou à l'extérieur de la nappe)

Surface de Gauss :



D'après le plan de symétrie tel que z=0 :

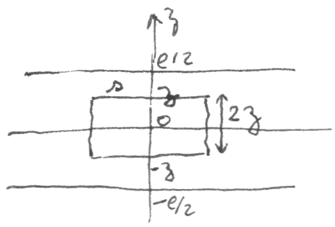
$E(z) = -E(-z)$

$$\phi_S = \oint_S d\phi = \iint_{S_1} \vec{E}.\vec{dS_1} + \iint_{S_2} \vec{E}.\vec{dS_2} + \iint_{S_L} \vec{E}.\vec{dS_L}$$

$\phi_L = 0$ car $\vec{E}.\vec{dS_L} = 0$; $\phi_1 = \iint_{S_1} \underbrace{E(z)}_{\text{cst sur } S_1}\vec{u_z}.\underbrace{\vec{n_1}}_{\vec{u_z}}dS_1 = E(z)\,S_1$

$\phi_2 = \iint_S E(-z)\vec{u_z}.\underbrace{(-\vec{u_z})}_{\vec{n_2}}dS_2 = E(z)\,S_2 \Rightarrow \underline{\phi_S = 2E\,s}$, $s = S_1 = S_2$ $\forall M$

Pour M à l'intérieur :



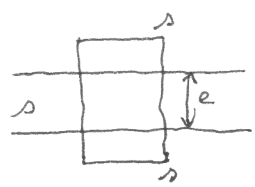
$Q_{int} = \rho V = \rho\, s(2z)$

Théo. de Gauss : $\phi_S = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow 2E\cancel{s} = \frac{\rho \cancel{s} 2z}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} z\,\vec{u_z} \quad -\frac{e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2}}$

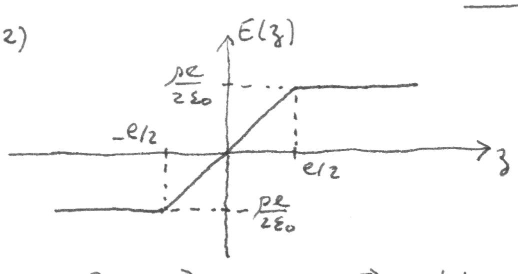
Pour M à l'extérieur :



$Q_{int} = \rho s e \Rightarrow 2E\cancel{s} = \rho \cancel{s} e/\varepsilon_0$

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \vec{E} = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} & z > e/2 \\ \vec{E} = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0}\vec{u_z} & z < -e/2 \end{array}}$

2)



3) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V \Rightarrow \vec{E} = -\frac{dV}{dz}\vec{u_z} \Rightarrow \frac{dV}{dz} = -E(z)$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} V(z) = -\frac{\rho e}{2\varepsilon_0} z + C_1 & z > e/2 \\ V(z) = -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0} + C_2 & -e/2 \leq z \leq e/2 \\ V(z) = \frac{\rho e}{2\varepsilon_0} z + C_3 & z < -\frac{e}{2} \end{array}\right.$$

$V(z=0) = 0 \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$

Continuité de V $\Rightarrow$

$\lim\limits_{\substack{z \to e/2 \\ z > e/2}} V(z) = \lim\limits_{\substack{z \to e/2 \\ z < e/2}} V(z) \Rightarrow -\frac{\rho e^2}{4\varepsilon_0} + C_1 = -\frac{\rho e^2}{8\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \underline{C_1 = \frac{\rho e^2}{8\varepsilon_0}}$

$\lim\limits_{\substack{z \to -\frac{e}{2} \\ z > -\frac{e}{2}}} V(z) = \lim\limits_{\substack{z \to -e/2 \\ z < -e/2}} V(z) \ldots \Rightarrow \underline{C_3 = C_1}$