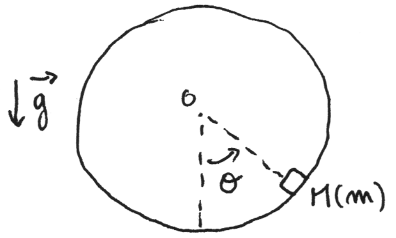
Exercice donné en interrogations orales :

Palet sur un support circulaire de rayon R. Le palet glisse sans frottement.



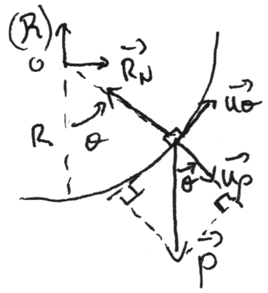
1) Déterminez l'équation du mouvement du palet.

2) La résoudre pour les petits angles.
Conditions initiales : $\theta(t=0)=0$; $\vec{v}(t=0)=v_0\vec{u_\theta}$

3) Pour v_0 donné déterminez l'angle maximal θ_{max} atteint par le palet.

4) Le palet risque-t-il de décoller du support ?

résolution : 1) $\vec{R_N}$: réaction normale au support (absence de frottements)



$$\vec{R_N}\begin{pmatrix}-R_N\\0\end{pmatrix} \quad \vec{P}\begin{pmatrix}mg\cos\theta\\-mg\sin\theta\end{pmatrix} \quad \vec{OM}\begin{pmatrix}R\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v}\begin{pmatrix}0\\R\dot\theta\end{pmatrix} \quad \vec{a}\begin{pmatrix}-R\dot\theta^2\\R\ddot\theta\end{pmatrix}$$

RFD en référentiel galiléen : $\vec{R_N}+\vec{P}=m\vec{a}$

$$\begin{pmatrix}-R_N\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}mg\cos\theta\\-mg\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-mR\dot\theta^2\\mR\ddot\theta\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}R_N=m(g\cos\theta+R\dot\theta^2) & (1)\\ \underline{\ddot\theta+\frac{g}{R}\sin\theta=0} & (2)\end{cases}$$

2) $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta\simeq\theta \Rightarrow \ddot\theta+\frac{g}{R}\theta=0 \Rightarrow \theta(t)=\alpha\cos(\omega_0t+\varphi)$ avec $\omega_0=\sqrt{\frac{g}{R}}$

$\dot\theta=-\alpha\omega_0\sin(\omega_0t+\varphi)$

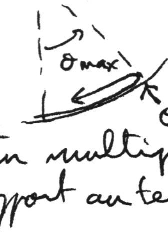
CI $\begin{cases}\theta(t=0)=0=\alpha\cos\varphi \Rightarrow \varphi=\pi/2 \quad (\text{ou } \varphi=-\pi/2 \text{ au choix})\\ \dot\theta(t=0)=\frac{v_0}{R}=-\alpha\omega_0\sin\varphi=-\alpha\omega_0 \Rightarrow \alpha=-\frac{v_0}{\omega_0R}\end{cases}$

$\vec{v}=R\dot\theta\vec{u_\theta}$; $\vec{v}(t=0)=v_0\vec{u_\theta}$
$=R\,\dot\theta(t=0)\vec{u_\theta}$

$\Rightarrow \theta(t)=-\frac{v_0}{\omega_0R}\cos(\omega_0t+\pi/2) \Rightarrow \boxed{\theta(t)=\frac{v_0}{\omega_0R}\sin(\omega_0t)}$

3) Première idée : θ_{max} / $\sin\omega_0t=1 \Rightarrow \theta_{max}=\frac{v_0}{\omega_0R}$ mais ce résultat n'est valable que pour les petits angles de 2).

$\underline{2^{me}\text{ idée}}$: θ_{max} est atteint que $\dot\theta$ s'annule :



θ augmente puis diminue en θ_{max}
$\Downarrow$
$\frac{d\theta}{dt}=0$

Il faut donc déterminer $\dot\theta$. Or l'équation du mvt ne donne que $\ddot\theta$, on va donc chercher ce qu'on appelle une intégrale première du mvt. Elle s'obtient en multipliant l'équation du mvt par $\dot\theta$, après on intègre par rapport au temps :

$$\ddot\theta+\frac{g}{R}\sin\theta=0 \Rightarrow \ddot\theta\dot\theta+\frac{g}{R}(\sin\theta)\dot\theta=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\dot\theta^2-\frac{g}{R}\cos\theta=\text{cste}$$
$$=\frac{1}{2}\dot\theta(t=0)^2-\frac{g}{R}\cos\theta(t=0)$$
$$=\frac{v_0^2}{2R^2}-\frac{g}{R}$$

$$\Rightarrow R\dot\theta^2\underset{(3)}{=}2g(\cos\theta-1)+\frac{v_0^2}{R} \;;\; \dot\theta=0 \Rightarrow \boxed{\cos\theta_{max}=1-\frac{v_0^2}{2gR}}$$

si $v_0>2\sqrt{gR}$, θ_{max} n'existe pas car le palet fait à priori un looping (s'il ne décolle pas avant d'atteindre $\theta=\pi$!)

4) Un objet décolle d'un support qd $R_N=0$. Or $\underset{((3)\text{ dans }(1))}{R_N}=mg\left(3\cos\theta-2+\frac{v_0^2}{gR}\right)$

$R_N=0 \Rightarrow \boxed{\cos\theta_d=\frac{2}{3}-\frac{v_0^2}{3gR}}$ θ_d : angle où le palet peut décoller.

Si θ_{max} dépasse θ_d, le palet décollera ($\Rightarrow$ chute libre), sinon il reste en contact.

Si $\cos\theta_d<-1$, θ_d n'existe pas, R_N ne s'annule pas si $v_0>\sqrt{5gR}$: looping réussit !

Si $v_0<\sqrt{2gR}$ ça ne décolle pas. Dans le cas limite $v_0=\sqrt{2gR}$, $\theta_d=\pi/2$.