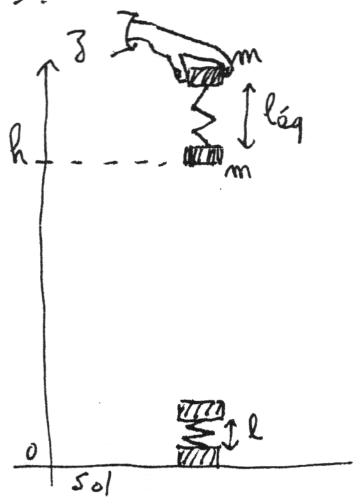
Système de points matériels – Aspect énergétique.

Exercice :

Un système est constitué de 2 masses m reliées par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0.
Le système est laché sans vitesse initiale, dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$, d'une hauteur h (voir Figure).
Arrivé au sol le système s'immobilise, quelle est la nouvelle longueur du ressort ?
Vous effectuerez le calcul avec le théorème de l'énergie cinétique puis avec celui de l'énergie mécanique.
Il n'y a pas de forces dissipatives.

figure :



∞

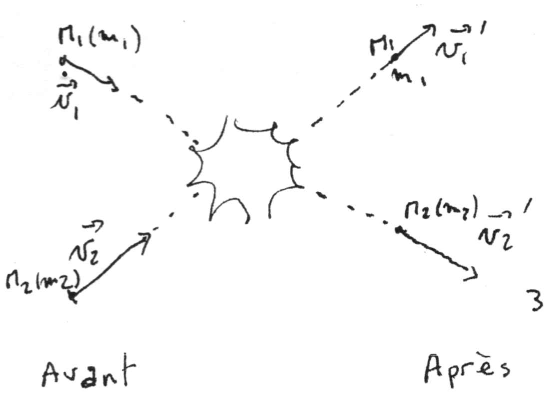
Choc (à une dimension) :

Choc de 2 pts matériels :

$\mathcal{S}$ isolé ou pseudoisolé : $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$\frac{d\vec{P}_{\mathcal{S}}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_{\mathcal{S}} = \vec{cst}$

$(\vec{P}_{\mathcal{S}})_{avant} = (\vec{P}_{\mathcal{S}})_{après}$



Données : $\vec{v}_1, \vec{v}_2$

Inconnues : $\vec{v}_1', \vec{v}_2'$

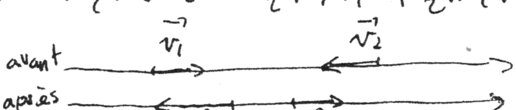
3D $\begin{cases} 4 \text{ équations} \\ 6 \text{ inconnues} \\ (2 \text{ vecteurs}) \end{cases}$

$\Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$

si choc élastique : $E_{c\mathcal{S}}(I) = E_{c\mathcal{S}}(F)$, en effet : $\Delta E_c = W_{ext} + W_{int}$
isolé $\Rightarrow W_{ext} = 0$
si solides $\Rightarrow W_{int} = 0$

$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$

à 1D :



$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \\ m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 \end{cases}$

$\Rightarrow (m_1/m_2)(v_1^2 - v_1'^2) = v_2'^2 - v_2^2$

$\begin{cases} m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2) \\ (m_1/m_2)(v_1 + v_1')\times(v_1 - v_1') = (v_2' + v_2)(v_2' - v_2) \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{v_1 + v_1' = v_2' + v_2}$ $\Rightarrow m_1v_1 + m_1v_1 + m_2v_2 - m_2v_2 = m_1v_2' + m_1v_2$

$\Rightarrow v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1+m_2}v_2$; v_1' : $1 \leftrightarrow 2$

Pétanque carreau : $v_2 = 0$
$\Rightarrow \begin{cases} v_2' = v_1 & (m_1 \\ v_1' = 0 \end{cases}$ échange des vitesses

Correction :

$\rightarrow \quad \Delta E_c = W_{int} + W_{ext}$

- la vitesse du $\mathcal{S}$ est nulle au début et à la fin : $v_I = 0$, $v_F = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta E_c = E_c(F) - E_c(I) = \frac{1}{2} M v_G^2(F) - \frac{1}{2} M v_G^2(I) = 0$

Rmq : $E_{c\mathcal{S}} = \frac{1}{2} M v_G^2 + E_c^*$; ici $E_c^* = 0$ car le $\mathcal{S}$ est immobile dans le réf. barycentrique en I et F.

- $W_{ext} = W_{Poids} = -\Delta Ep_{pes.} = -\left(Ep_{pes}(F) - Ep_{pes}(I)\right)$

$Ep(I) = mg\,h + mg(h + l_{éq}) = 2mgh + mg\,l_{éq} = mg(2h + l_{éq})$

$Ep(F) = mg \times 0 + mgl = mgl$

$\Delta Ep = mgl - mg(2h + l_{éq}) = mg(l - 2h - l_{éq})$

$W_{ext} = mg(2h + l_{éq} - l)$

- $W_{int} = W_{tension} = -\Delta Ep_{élastique} = Ep_{él.}(I) - Ep_{él}(F)$

$= \frac{1}{2} k(l_{éq} - l_0)^2 - \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 = -\frac{1}{2} k(l - l_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{m^2 g^2}{k}$

avec $l_{éq} = l_0 + \frac{mg}{k}$

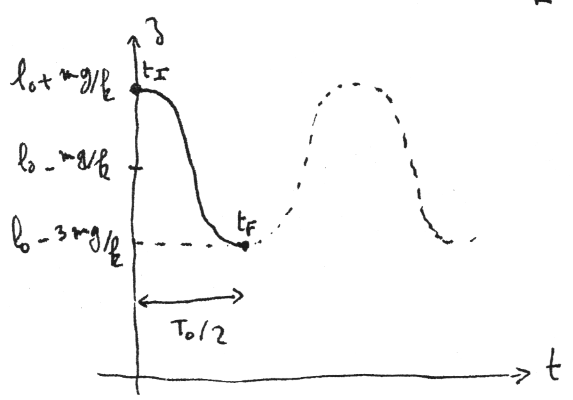
- $0 = mg(2h + l_{éq} - l) - \frac{1}{2} k(l - l_0)^2 + \frac{m^2 g^2}{2k}$

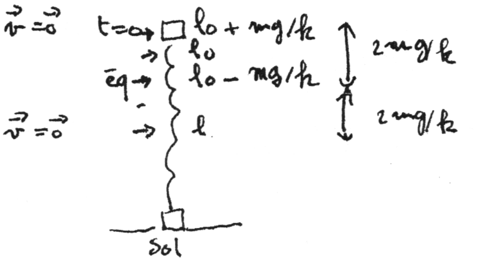
$\Rightarrow \quad (l - l_0)^2 + \frac{2mg}{k}(l - l_0) - 4\frac{mgh}{k} - 3\frac{m^2 g^2}{k^2} = 0$

$\Rightarrow \quad l - l_0 = -\frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + 4\frac{mgh}{k} + 3\left(\frac{mg}{k}\right)^2}$

$\Rightarrow \quad \boxed{l = l_0 - \frac{mg}{k}\left[2\sqrt{1 + \frac{kh}{mg}} + 1\right]}$

Si $h = 0$: $l = l_0 - 3\frac{mg}{k}$





$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$