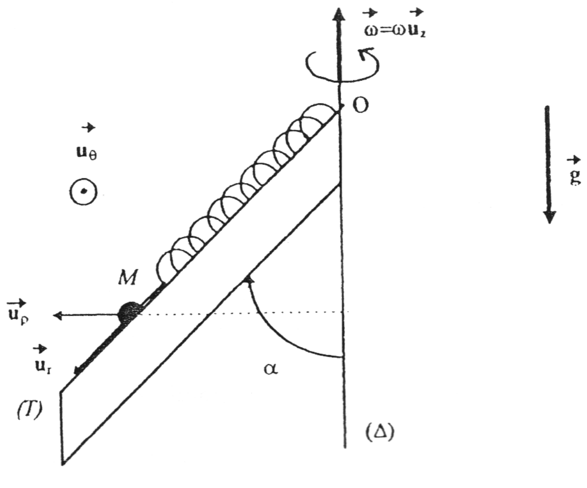
B - Mouvement sur une glissière tournante

(extrait du concours ENAC pilotes 96)

Un système est constitué d'une glissière *(T)* soudée sur un bâti mobile autour d'un axe vertical (Δ). Cette glissière est inclinée d'un angle α fixe par rapport à la verticale (figure ci-dessous). Sur la glissière, est posée un solide *(S)* de masse m, qui peut glisser sans frottement sur la glissière. Ce solide, que l'on assimilera à un point matériel M, est accroché à un ressort à spires non jointives, de raideur k, de longueur à vide l_0 dont l'autre extrémité est fixée au bâti.



1. Le système est tout d'abord immobile dans le référentiel du laboratoire $\Re$ supposé galiléen. Déterminer la longueur l_e du ressort à l'équilibre.

2. Le système est mis en rotation autour de l'axe vertical (Δ) avec une vitesse angulaire constante ω suffisamment faible pour que *(S)* reste au contact de *(T)*. On étudie le solide *(S)* lorsque le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre notée l_e'.

   a) Etude dans le référentiel du laboratoire.
      - i) Exprimer le vecteur accélération $\vec{a}$ du solide *(S)* dans $\Re$ en fonction de l_e' et des données (On pourra utiliser la base locale des coordonnées cylindriques de M, $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
      - ii) En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel du laboratoire, et en la projetant sur le vecteur $\vec{u}_r$ déterminer la longueur l_e' en fonction des données.
      - iii) Déterminer la réaction de la glissière sur *(S)* (direction, sens et norme).

   b) On considère le référentiel $\Re$' lié à la glissière.
      - i) Qu'appelle-t-on force d'inertie d'entraînement subie par le solide *(S)*? L'exprimer en fonction de l_e' et des données.
      - ii) Qu'appelle-t-on force d'inertie de Coriolis subie par le solide *(S)*? La déterminer.
      - iii) Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel $\Re$' et retrouver les résultats du a) ii) et iii).

3. La vitesse de rotation du système est maintenant ω_0. Elle est telle que le solide décolle juste de la glissière quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre. Déterminer ω_0.

B -

Mouvement sur une glissière tournante : corrigé

1. Les forces appliquées au solide *(S)* sont :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- la réaction de la glissière $\vec{R}$
- la tension du ressort $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_{\rho}$

À l'équilibre, la RFD appliquée au solide s'écrit dans $\Re$: $\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$

La projection sur $\vec{u}_{\rho}$ donne :

$$0 = mg\cos\alpha - k(l_e - l_0)$$

$$l_e = l_0 + \frac{mg\cos\alpha}{k}$$

2. a) i) Lorsque le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre, le solide est à l'équilibre dans le référentiel lié à la glissière, mais dans le référentiel du laboratoire, il a un mouvement circulaire uniforme, de centre H, projeté de M sur l'axe, de rayon l_e'sinα, de vitesse angulaire ω. Son accélération dans $\Re$ s'écrit donc :

$\vec{a} = -l_e'\sin\alpha\omega^2\vec{u}_\rho$ où $\vec{u}_\rho$ est le vecteur unitaire de la base locale cylindrique de M, d'axe (Δ).

2. a) ii) La RFD appliquée au solide dans le référentiel $\Re$ galiléen s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R}$

La projection sur la direction de la glissière donne : $m(-l_e'\omega^2\sin\alpha)\sin\alpha = mg\cos a - k(l_e' - l_0)$

d'où : $\boxed{l_e' = \dfrac{kl_0 + mg\cos\alpha}{k - m\omega^2\sin^2\alpha}}$

2.a) iii) La RFD nous montre que la réaction est dans le plan contenant Δ et M. Par ailleurs, le glissement étant sans frottement, sa composante sur $\vec{u}_r$ est nulle. La projection de la RFD sur la normale à la glissière dans le plan contenant Δ et M (sur $\vec{u}_\alpha$) donne :

$$m(-l_e'\omega^2\sin\alpha)\cos\alpha = -mg\sin\alpha + R$$

$$\vec{R} = m\sin\alpha(g - l_e'\omega^2\cos\alpha)\vec{u}_\alpha$$

2. b) i) La force d'inertie d'entraînement est $\vec{f}_e = -m\vec{a}_e$ où $\vec{a}_e$ est l'accélération d'entraînement, c'est-à-dire l'accélération du point coïncidant de M dans $\Re$. Ici, le point M étant immobile dans $\Re$', $\vec{a}_e$ est aussi l'accélération de M dans $\Re$ (l'accélération de Coriolis et l'accélération relative de M sont nulles) :

$$\vec{a}_e = -l_e'\sin\alpha\omega^2\vec{u}_\rho \qquad \vec{f}_e = ml_e'\sin\alpha\omega^2\vec{u}_\rho$$

2. b) ii) La force d'inertie de Coriolis est $\vec{f}_c = -m\vec{a}_c$ où $\vec{a}_c$ est l'accélération de Coriolis. Or ici, le point M étant en équilibre dans le référentiel d'entraînement $\Re$', sa vitesse relative est nulle, et par suite l'accélération de Coriolis et la force d'inertie de Coriolis sont nulles.

2. b) iii) Dans le référentiel non galiléen $\Re$', la RFD s'écrit :

$$m\vec{a}' = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f}_e + \vec{f}_c$$

Soit, puisque le solide est en équilibre dans $\Re$' :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + ml_e'\sin\alpha\omega^2\vec{u}_\rho \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = -ml_e'\sin\alpha\omega^2\vec{u}_\rho$$

On retrouve bien l'équation vectorielle donnée par la RFD dans $\Re$ (et par suite les mêmes projections).

3. Quand le solide décolle, la réaction est nulle. On déduit d'après le 2. :

$$\vec{R} = m\sin\alpha(g - l_e'\omega_0^2\cos\alpha)\vec{u}_r = \vec{0} \Leftrightarrow g = l_e'\omega_0^2\cos\alpha$$

Soit, en utilisant l'expression de la longueur à l'équilibre trouvée au 2.

$$g = \frac{kl_0 + mg\cos a}{k - m\omega_0^2\sin^2\alpha}\omega_0^2\cos\alpha \Leftrightarrow (kl_0 + mg\cos a)\omega_0^2\cos\alpha = g(k - m\omega_0^2\sin^2\alpha)$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{gk}{mg + kl_0\cos\alpha}}}$$