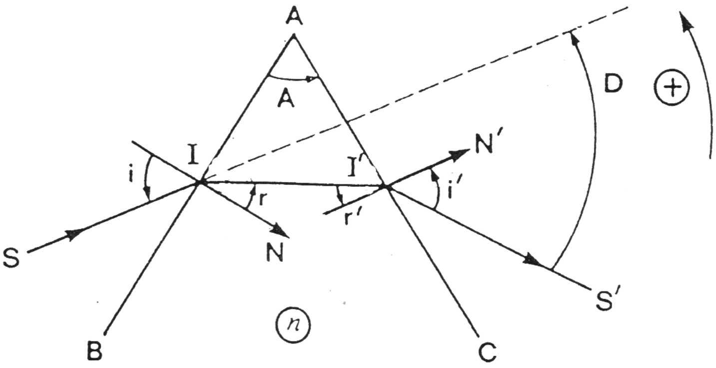
Pour le lundi : 24 septembre (au TD)   DL

Application des lois de Descartes au prisme

On considère un prisme constitué par une substance non absorbante, homogène et isotrope, d'indice n (n>1) pour une radiation de longueur d'onde λ. Le milieu extérieur, dans lequel est plongé ce prisme, est l'air dont l'indice sera pris égal à 1.



A- Formules du prisme.

A.1. Quelle est la relation qui lie l'angle i, l'angle r et l'indice n ?
Même question avec les angles i', r' et l'indice n.

A.2. Montrer qu'un relation très simple relie r, r' et A.

A.3. Établir la relation liant D, i, i' et A.

A.4. Combien décomptez-vous d'équations et d'inconnues ?
Conclusion ?

B- Conditions d'émergence

B.1. Quelle condition avons nous sur |r'| pour que le rayon lumineux puisse émerger du prisme?

B.2. Condition sur r ?

B.3. Condition nécessaire sur A ?

B.4. De même établir la condition d'émergence du rayon sur i.
Quel est l'angle d'incidence minimum i_0 ?
A.N.: A=60°   n=1,5
Indiquez sur un schéma les rayons qui peuvent dans ce cas ressortir.

Dans quels cas i_0 est positif ou négatif ?

C- Étude de la courbe D(i)

C.1. Que vaut D pour les deux valeurs extrêmes de i?

A.N.

* [C.2. Montrez que : dD/di = 1 - cos i.cos r'/ cos r.cos i'
Quelles relations avons nous entre i et i', et r et r' pour le minimum de déviation ?
Établir une relation entre A et r_m (m pour minimal).
Établir une relation entre A, i_m et D_m.
Établir une relation entre A, n et D_m.

Calculez r_m, i_m et D_m.
Faire un schéma.

C.3. Établir le tableau de variation de D(i) puis tracer la courbe.

D- Évolution de D en fonction de n.

D.1. Montrez sans calcul que la déviation augmente avec l'indice.

D.2. D'après la formule de Cauchy dans quel ordre est réalisée la décomposition de la lumière blanche.

(*) on admettra que i = i' et r = r' au minimum de déviation

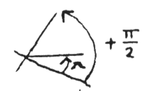
↳

Application des lois de Descartes au prisme
(correction)

A.1. $\underline{\sin i = n \sin r}$ (1)

$\underline{n \sin r' = \sin i'}$ (2)

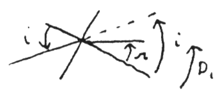
A.2. (AII') : $\left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) + A = \pi$



attention tous les angles du triangle doivent être orientés dans le sens positif.

$\Rightarrow \quad \underline{A = r + r'}$ (3)

A.3. $D = \underbrace{(i - r)}_{1^{\text{ère}}\ \text{réfract}^{\circ}} + \underbrace{(i' - r')}_{2^{\text{ème}}\ \text{réfract}^{\circ}} \Rightarrow \underline{D = i + i' - A}$ (4)



A.4. Valeurs fixées pour une situation expérimentale donnée : i, A et n.

Inconnues (variable qu'on ne peut fixer expérimentalement) :

r, r', i' et D.

Equations : 4 ((1), (2), (3) et (4)).

Autant d'équations que d'inconnues $\Rightarrow$ le problème peut être résolu.

B.1. $\underline{|r| < i\ell}$, $\sin i\ell = \frac{1}{n}$

B.2. $\Rightarrow \quad -i\ell < r' < i\ell \ \overset{(3)}{\Rightarrow} \ A + i\ell > r > A - i\ell$

de plus : $i \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[\quad \Rightarrow \quad i\ell > r > -i\ell$

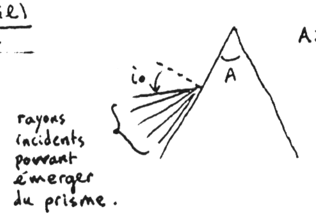
d'où : $\underline{r > A - i\ell}$ l'autre inégalité étant toujours vérifiée.

B.3. $i\ell > r \Rightarrow i\ell > A - i\ell \Rightarrow \underline{A < 2 i\ell}$ (condit° nécessaire).

B.4. (1) $\Rightarrow$ $\sin i > n \sin(A - i\ell)$

soit : $\underline{\sin i > \frac{\sin(A - i\ell)}{\sin i\ell}}$

$\underline{\sin i_0 = \frac{\sin(A - i\ell)}{\sin i\ell}}$



$A > i\ell$, $i_0 > 0$

A.N. : $i\ell \simeq 41°49'$ $\quad \underline{i_0 \simeq 27°55'}$

$\underline{i_0 < 0 \text{ si } A < i\ell}$; $\underline{i_0 > 0 \text{ si } A > i\ell}$

C.1. $< i < \frac{\pi}{2}$

Points extrêmes : $\bullet\ i = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = i\ell \Rightarrow r' = A - i\ell$

$\Rightarrow \sin i' = n \sin(A - i\ell)$

$\Rightarrow i' = i_0$ (Principe de retour inverse de la lumière vérifié !)

$\Rightarrow D = \frac{\pi}{2} + i_0 - A$

$\bullet\ i = i_0 \Rightarrow i' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow D(i_0) = D\left(\frac{\pi}{2}\right) = D_0$

A.N. : $D_0 \simeq 57°55'$

C.2. (4) $\Rightarrow \frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$ $\quad \left(\frac{dA}{di} = 0 \text{ car } A \text{ est fixé}\right)$

(1) $\Rightarrow \cos i = n \cos r \frac{dr}{di}$ $\quad$ (2) $\Rightarrow n \cos r' \frac{dr'}{di} = \cos i' \frac{di'}{di}$

(3) $\Rightarrow \frac{dr}{di} = -\frac{dr'}{di}$

(2)+(3) $\Rightarrow \frac{di'}{di} = \frac{n \cos r'}{\cos i'}\left(-\frac{dr}{di}\right) = n \frac{\cos r'}{\cos i'} \cdot (-1) \frac{\cos i}{n \cos r}$

$\Rightarrow \frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'}$

Extremum $\Rightarrow \frac{dD}{di} = 0 \Rightarrow \frac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'} = 1$

$\Rightarrow \cos^2 i \cos^2 r' = \cos^2 r \cos^2 i' \Rightarrow (1 - \sin^2 i)(1 - \sin^2 r') = (1 - \sin^2 r)(1 - \sin^2 i')$

$\Rightarrow (1 - \sin^2 i)\left(1 - \frac{\sin^2 i'}{n^2}\right) = (1 - \sin^2 i')\left(1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}\right)$

$\Rightarrow \sin^2 i \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) = \sin^2 i' \left(\frac{1}{n^2} - 1\right) \Rightarrow i = i'$ pour les valeurs ici physiquement accessibles $\Rightarrow r = r'$

$A = 2 r_m$; $D_m = 2 i_m - A$; (1) $\Rightarrow n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$

A.N. : $r_m = 30°$ $\quad \sin i_m = n \sin r_m \Rightarrow i_m = 48°35' \Rightarrow D_m = 37°11'$

C.3.

i	i_0		i_m		$\pi/2$
$\frac{dD}{di}$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1
D	D_0	$\searrow$	D_m	$\nearrow$	D_0

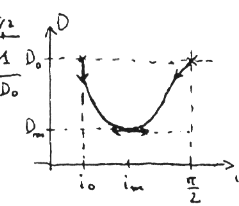


Figure symétrique

D.1. $(i - r)$ augmente avec n à la $1^{\text{ère}}$ réfract°.
$(i' - r')$ " " " " " $2^{\text{ème}}$ " .
$\Rightarrow D \nearrow$ avec n

D.2. $n = A + \frac{B}{\lambda^2} \Rightarrow n_{\text{rouge}} < n_{\text{violet}}$

$\Rightarrow D_R < D_V$